Schriftliche Abiturprüfung 1985

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer: 5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a: D_{max} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto (x + 2a) \cdot e^{2 + \frac{x}{2a}} \; , \; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

1.1 Zeigen Sie: Die Schaubilder aller Funktionen der Schar schneiden die x-Achse unter dem gleichen Winkel. Geben Sie diesen Winkel an.

1.2 Berechnen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Extrempunkte der Kurven der Schar f_a liegen.

1.3 Diskutieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto (x - 2) \cdot e^{2 - \frac{x}{2}}$$

(einschließlich Krümmung u. Wendepunkte; 1LE $\hat{=}$ 0,5 cm)

1.4 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt.

1.5 Ermitteln Sie durch Rechnung diejenigen Punkte P(k/0) der x-Achse, von denen aus man zwei, eine bzw. keine Tangente an das Schaubild von f legen kann.

Aufgabe 2a

Gegeben sind die Ebene $e : x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 12 = 0$,

die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \; , \lambda \in \mathbb{R}$,

und die Geradenschar $h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ k+1 \\ k \end{pmatrix} \; , \mu \in \mathbb{R} \; , \; k \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie k so, daß sich die Geraden g und h_k schneiden, und geben Sie den Schnittpunkt an.

Schriftliche Abiturprüfung 1985

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer: 5 Stunden

2. Berechnen Sie den Schnittwinkel, unter dem sich die Geraden g und $h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden.

3. Berechnen Sie eine Gleichung der Geraden l, die den Schnittwinkel zwischen g und h_1 halbiert.

4. Berechnen Sie eine Gleichung der Spiegelgeraden g' der Geraden g bezüglich der Ebene e.

5. Berechnen Sie diejenigen Punkte der Geraden g, die von e den Abstand 6 haben.

Aufgabe 2b

1. Gegeben ist $U_c = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 - x_2 - 3x_3 = c \right\}, \; c \in \mathbb{R}$.

1.1 Zeigen Sie: U_c ist genau dann Unterraum des $\mathbb{R}^3$, wenn c=0.

1.2 Berechnen Sie eine Basis von U_0 .

2. Berechnen Sie alle $k \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren (k,1,0) , (2k,1,2) , (0,3k,1) linear unabhängig sind.

3. Es sei $(G,\circ)$ eine Gruppe; a' bezeichne das inverse Element zu $a \in G$.
Zeigen Sie: Für alle $a,b \in G$ gilt: $(a \circ b)' = b' \circ a'$

Aufgabe 3

1. Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $n \in \mathbb{N}$, $f(1) = 0$,
$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto x^n \cdot f(x)$.
Zeigen Sie: Die Schaubilder von f und g berühren sich an an der Stelle 1.

2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto ax + b \cdot \ln x$, $a,b \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Wenn $ab > 0$, dann ist f streng monoton.

Schriftliche Abiturprüfung 1985

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer: 5 Stunden

3. Sei $f: [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$, stetig und punktsymmetrisch zum Ursprung.

3.1 Zeigen Sie: Die Funktion $F: [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \int_0^x f(t)dt$ ist symmetrisch zur y-Achse.

3.2 Zeigen Sie mit Hilfe von 3.1 :

Für alle $x \in [-a,a]$ gilt : $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$

3.3 Bestimmen Sie $\int_{-1}^{1} t \cdot \sqrt{t^4 + 1} \cdot dt$.

Aufgabe 4

Eine Stadt wird über drei Wasserwerke W_1, W_2 und W_3 mit Wasser versorgt. Die drei Wasserwerke arbeiten unabhängig voneinander und fallen an einem bestimmten Tag mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1=0{,}06$, $p_2=0{,}05$ bzw. $p_3=0{,}03$ aus. Die Versorgung ist gesichert, wenn mindestens zwei Wasserwerke arbeiten.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an einem bestimmten Tag die Versorgung gesichert ist. (Erg.: 0,99388)
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß während eines ganzen Jahres die Versorgung gesichert ist.
3. In welchem Zeitraum ist mit mindestens 90% iger Wahrscheinlichkeit mit mindestens einem Versorgungsausfall zu rechnen?
4. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Versorgung ausfällt, wenn W_1 ausgefallen ist.
5. Die Versorgung ist ausgefallen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß W_1 nicht arbeitet?