Schriftliche Abiturprüfung 1986

Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a : D_{max} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_a(x) = \frac{x^3 + a}{(x+1)^2}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

1.1 Bestimmen Sie die Funktionen der Schar, deren Schaubilder einen Wendepunkt mit zur x-Achse paralleler Tangente besitzen.

1.2 Zeigen Sie, daß alle Funktionen der Schar eine gemeinsame schiefe Asymptote haben. Geben Sie deren Gleichung an.

1.3 Berechnen Sie den Winkel, unter dem der Graph der Funktion f_2 der Schar die Asymptote schneidet.

1.4 Diskutieren Sie die Funktion

$$f : D_{max} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

(einschließlich Krümmung und Wendepunkte, 1 LE $\hat{=}$ 1 cm).

1.5 Die Schaubilder von f und f_2 der Schar begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche, die sich ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, daß die Maßzahl dieser Fläche endlich ist.

Schriftliche Abiturprüfung 1986

Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden

Aufgabe 2a

Gegeben sind die Punkte A(5/1/3), B(0/1/8), C(-1/-3/7), D(-2/-4/3) und die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B, C in Normalenform.
   Zeigen Sie, daß D nicht in dieser Ebene liegt.

2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene

$$e : \; 2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 - 15 = 0 .$$

3. Bestimmen Sie den Spiegelpunkt D* von D bezüglich e .

4. Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene e .

5. Stellen Sie eine Gleichung der senkrechten Projektion g* der Geraden g in e auf.

Schriftliche Abiturprüfung 1986

Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1.Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden

Aufgabe 2b

1. Gegeben sei die Verknüpfung

$$\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (a,b) \mapsto a \circ b = (1 - m)\cdot a + b \ .$$

Bestimmen Sie alle $m \in \mathbb{R}$ so, daß "o" assoziativ ist .

2. Gegeben sind die Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = (1,-k,0),\ \vec{b} = (0,1,k),\ \vec{c} = (k-1,0,2\cdot k),\quad k \in \mathbb{R} \ .$$

2.1 Bestimmen Sie k so, daß die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind.

2.2 Zeigen Sie : Für k = 2 gilt für den von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ erzeugten Unterraum U :

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ 4\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 = 0 \right\} \ .$$

2.3 Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U .

2.4 Für welche $t \in \mathbb{R}$ gilt : $(t, -t, 2\cdot t) \in U$?

Schriftliche Abiturprüfung 1986

Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1.Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden

Aufgabe 3

1. Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion, weiter sei

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad f(1) = \frac{2}{e} \ .$$

Bestimmen Sie f .

2. Gegeben sei die Funktionenschar

$$F_a : [-\ln a, \infty[\ \to \mathbb{R},\ x \mapsto F_a(x) = \int_{-\ln a}^{x} 4(a\cdot e^{-t} - e^{-2t})\,dt,\ a \in \mathbb{R}^+ .$$

2.1 Zeigen Sie, daß F_a streng monoton steigend ist,

2.2 Bestätigen Sie, daß F_a die Funktionsgleichung

$$F_a(x) = 2\,(a - e^{-x})^2 \quad \text{hat.}$$

2.3 Begründen Sie, daß $\text{Bild}(F_a) = [0,\ 2a^2[$ ist.

2.4 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion F_a^{-1} von F_a .

Schriftliche Abiturprüfung 1986

Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1.Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden

Aufgabe 4

1. In einer Urne sind 5 Kugeln : 3 weiße, eine schwarze und eine rote.

1.1 Man zieht gleichzeitig zwei Kugeln.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A : "Zwei weiße Kugeln" ,
B : "Genau eine weiße Kugel" ,
C : "Keine weiße Kugel" ,
D : "Mindestens eine weiße Kugel" .

1.2 Man zieht solange eine Kugel, bis zwei weiße Kugeln gezogen sind.

1.2.1 Bestimmen Sie eine geeignete Ergebnismenge und ermitteln Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

1.2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

E : "Eine rote Kugel wird gezogen" .

2. Auf einer Autobahnstrecke halten sich durchschnittlich 60 % aller Autofahrer an eine vorgeschriebene Höchstgeschwindigkeit.

2.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich von 15 zufällig ausgewählten Autofahrern alle an die Beschränkung halten ?

2.2 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich von 15 zufällig ausgewählten Autofahrern höchstens zwei nicht an die Geschwindigkeitsbeschränkung halten ?