Schriftliche Abiturprüfung 1987

Fach:	Mathematik
Prüfungsart:	1. Prüfungsfach
Dauer:	5 Stunden
Hilfsmittel:	Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto (k \cdot \ln x - 1)^2 \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen.
2. Zeigen Sie: Es gibt genau einen Punkt, durch den alle Kurven der Schar gehen.
3. Diskutieren Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}; \; x \longmapsto (\ln x - 1)^2$, Krümmung und Wendepunkte eingeschlossen.
4. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graph der Funktion f und dem Intervall $[e, e^2]$. (Hinweis: $x \cdot \ln x - x$ ist Stammfunktionsterm zu $\ln x$)
5. Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{R}$, für die man von $P(0/b)$ aus Tangenten an das Schaubild von f legen kann.

Aufgabe 2a

Gegeben sind der Punkt $P(-4/2/5)$ und die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und h.
2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von g und den Spiegelpunkt P' von P bezüglich g.
3. Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene auf, die P und g enthält.

Schriftliche Abiturprüfung 1987

Fach:	Mathematik
Prüfungsart:	1. Prüfungsfach
Dauer:	5 Stunden

4. Berechnen Sie eine Gleichung der Geraden, die durch P geht und g und h schneidet. (Hinweis: Beachten Sie Teil 3!)

Aufgabe 2b

1. Gegeben: $\vec{a} = (1, -2, 4)$, $\vec{b}_k = (k, 0, 1)$, $\vec{c}_k = (-1, -2, 2k)$, $k \in \mathbb{R}$.

   Es sei $U_k = \langle \vec{a}, \vec{b}_k, \vec{c}_k \rangle$.

1.1 Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{R}$, so daß $\dim U_k = 2$.

1.2 U_1 hat die Dimension 2. Geben Sie eine Basis von U_1 an.

1.3 Prüfen Sie, ob $\vec{d} = (-1, -2, 3)$ zu U_1 gehört.

2. In $\mathbb{Z}$ ist die Verknüpfung o gegeben durch $a \circ b = a + b - a \cdot b$

2.1 Lösen Sie die Gleichungen: $u \circ x = 1$, $(-1) \circ x = v$ und $1 \circ x = w$ in Abhängigkeit von u,v,w.

2.2 Zeigen Sie: o ist auch eine Verknüpfung in $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$.

Aufgabe 3

1. $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion mit Stammfunktion F. Es sei $f(0) = F(0) = 1$ und $F(1) = 0$.

   Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 x \cdot f'(1 - x)\, dx$.

2. $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sei eine differenzierbare Funktion und

   $g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \; ; \; x \longmapsto x \cdot f(x)$.

   Bestimmen Sie f so, daß $g' = 2f$ und $f(1) = 2$ ist.

Schriftliche Abiturprüfung 1987

Fach:	Mathematik
Prüfungsart:	1. Prüfungsfach
Dauer:	5 Stunden

3. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion und $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   Es sei $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

   Zeigen Sie: Für alle $x \geq 0$ gilt: $F(x) \leq x \cdot f(x)$.
   (Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $d: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto F(x) - x \cdot f(x)$ auf Monotonie und Extrema!)

Aufgabe 4

1.1 Ein Schütze trifft ein Ziel mit der Wahrscheinlichkeit 2/3.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: "Er trifft bei drei Schüssen höchstens einmal!"

B: "Er trifft bei sechs Schüssen nur bei den ersten vier."

C: "Er trifft spätestens beim vierten Schuß zum ersten Mal!"

1.2 Welche Trefferwahrscheinlichkeit müßte der Schütze haben, damit er mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit bei vier Schüssen mindestens einmal trifft?

2. Zu einem Leistungskurs gehören 6 Mädchen und 12 Jungen. Die Kursteilnehmer werden durch zufällige Auswahl in zwei gleichgroße Gruppen aufgeteilt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_1: " Zu einer Gruppe gehört kein Mädchen."

E_2: " Die Mädchen sind auf beide Gruppen gleich verteilt."