Schriftliche Abiturprüfung 1988

Fach:	Mathematik
Prüfungsart:	1. Prüfungsfach
Dauer:	5 Stunden
Hilfsmittel:	Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{1}{4}(a - e^{-x})^2 \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

1. Diskutieren Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{4}(4 - e^{-x})^2$$

(einschließlich Krümmung und Wendepunkte; 1 LE = 2 cm)

2. Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = b$, $b \in \mathbb{R}^+$.
   Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f_a mit der Geraden g. Für welche Werte von b erhält man einen Schnittpunkt, und für welche Werte erhält man zwei Schnittpunkte?

3. Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die eingeschlossen wird vom Graph der Funktion f aus Teil 1 und der Geraden mit der Gleichung $y = 4$.

4. Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte der Schar f_a liegen.

(Zur Kontrolle: $f_a''(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(2e^{-x} - a)$)

Schriftliche Abiturprüfung 1988

Fach:	Mathematik
Prüfungsart:	1. Prüfungsfach
Dauer:	5 Stunden
Hilfsmittel:	Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 2a

Gegeben sind die Punkte

$A(2|-3|2)$, $B(5|-5|0)$, $C(-1|3|6)$, $D(4|-4|9)$,

die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und die Ebene

$$e: \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 25$$

1. Stellen Sie die allgemeine Normalengleichung der Ebene durch die Punkte A, B, C auf.

2. Bestimmen Sie die Punkte der Geraden g, die von der Ebene e den Abstand 7 haben.

3. Zeigen Sie, daß der Fußpunkt F des Lotes vom Punkt D auf die Ebene e der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist.

4. Bestimmen Sie den Spiegelpunkt E von D bezüglich e. (Ergebnis: $E(0|2|-3)$)

5. Begründen Sie, daß das Viereck BDCE eine Raute ist.

6. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die die Raute BDCE als Grundfläche und den Punkt A als Spitze hat.

Schriftliche Abiturprüfung 1988

Fach:	Mathematik
Prüfungsart:	1. Prüfungsfach
Dauer:	5 Stunden
Hilfsmittel:	Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 2b

1. Gegeben ist der Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit

$$U = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \alpha(0,\ -3,\ 2) + \beta(-3,\ 0,\ 1) + \gamma(-2,\ 1,\ 0) \text{ mit } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

1.1 Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U.

1.2 Zeigen Sie, daß $U = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\right\}$ ist.

1.3 Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, daß $U = \langle(-2,-2,2k)\ ,\ (-5,k,1)\ ,\ (3,-3,1)\rangle$ ist.

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ seien Vektoren des $\mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:

$\vec{a}\cdot\vec{a} = 2,\quad \vec{b}\cdot\vec{b} = 3,\quad \vec{c}\cdot\vec{c} = 2,\quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 2,$

$\vec{a} \perp \vec{b},$

$\vec{a}$ und $\vec{c}$ schließen einen Winkel von $60°$ ein.

2.1 Zeigen Sie, daß $\vec{a}\cdot\vec{c} = 1$ ist.

2.2 Beweisen Sie, daß $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind.
(Anleitung: Gehen Sie von der Definition der linearen Unabhängigkeit aus und multiplizieren Sie nacheinander mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.)

Aufgabe 3

1. Die Parabeln mit den Gleichungen $y = 1 - x^2$ und $y = x^2 - 1$ umranden eine Fläche. In diese Fläche werden Rechtecke so einbeschrieben, daß ihre Ecken auf den Parabeln liegen und ihre Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind. Es gibt ein Rechteck mit maximalem Inhalt. Bestimmen Sie diesen Inhalt.

2. Bestimmen Sie durch Integration eine Stammfunktion von

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto e^x \cdot \sin x$$

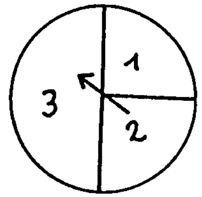
3. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
Zeigen Sie: Wenn der Graph von f zur y-Achse symmetrisch ist, dann ist der Graph von f' zum Nullpunkt symmetrisch.

4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion und habe folgende Eigenschaft:
Die Steigung der Tangente in einem Punkt des Graphen ist proportional zur x-Koordinate des Berührpunktes. Drücken Sie diese Eigenschaft durch eine Gleichung aus. Welche Funktionen haben die Eigenschaft?

Schriftliche Abiturprüfung 1988

Fach:	Mathematik
Prüfungsart:	1. Prüfungsfach
Dauer:	5 Stunden
Hilfsmittel:	Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 4



1. Ein Glücksrad ist in 3 Felder geteilt, die durch die Zahlen 1, 2, 3 gekennzeichnet sind. Nach Drehen des Rades zeigt der Pfeil immer genau in ein Feld und bestimmt dadurch eine Zahl.

1.1 Ein Spieler dreht das Glücksrad zehnmal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: "1 erscheint genau zweimal".

B: "1 erscheint mindestens zweimal".

C: "1 erscheint fünfmal, 2 zweimal".

D: " Die Summe der 10 Zahlen beträgt 12".

1.2 Ein Spieler dreht das Glücksrad n-mal.
Ab welchem n lohnt es sich, darauf zu wetten, daß mindestens einmal 1 erscheint?

2. Die Krankheit K tritt bei 7% aller kranken Kinder auf. Dabei erscheint das Symptom S in 92% aller Fälle. Bei den restlichen 93% der erkrankten Kinder erscheint das Symptom in 8,5% aller Fälle.
Bei einem erkrankten Kind zeigt sich das Symptom S. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es die Krankheit K hat?
(Hinweis: Verwenden Sie ein Baumdiagramm!)