SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 1989

Fach : Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{max} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2x+a}{(x+1)^2}$; $a \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie: $f''_a(x) = 2 \cdot \frac{2x+3a-4}{(x+1)^4}$
2. Diskutieren Sie die zu $a = 4$ gehörende Funktion der Schar, Krümmung und Wendepunkte eingeschlossen.
3. Der Graph der Funktion aus Teil 2 schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = 3$ eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
4. Untersuchen Sie die Funktionen f_a der Schar auf Hoch- und Tiefpunkte. Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle diese Extrempunkte liegen.
5. An welche Kurven der Schar lassen sich Tangenten legen, die durch den Ursprung gehen?

Aufgabe 2a

1. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen

$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_2 : 7x_1 + x_2 - x_3 + 9 = 0 .$$

   Welche besondere Lage hat die Schnittgerade im Koordinatensystem?

2. Gegeben ist das Quadrat ABCD mit den Eckpunkten
   A(3|1|2), B(-1|3|6), C(1|-1|10), D(5|-3|6).
   Dieses Quadrat ist die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide mit der Volumenmaßzahl 36. Bestimmen Sie einen der beiden Punkte, die als Pyramidenspitze in Frage kommen.

Schriftliche Abiturprüfung 1989

Fach : Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach

---

3. Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   und den Geraden der Geradenschar

$$h_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 2k-1 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2b

1. Durch $a \circ b = ab + 4a + 4b + 12$ ist eine assoziative Verknüpfung $\circ$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob $(\mathbb{R}, \circ)$ eine Gruppe ist.
2. Sei $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor.
   Beweisen Sie: Die Menge der zu $\vec{a}$ orthogonalen Vektoren des $\mathbb{R}^3$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
3. Gegeben ist der Unterraum U des $\mathbb{R}^3$ mit:
   $U = \{(p-q, q-r, 2r-p) \mid p,q,r \in \mathbb{R}\}$.
   Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U.
4. Sei V ein Vektorraum und $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ eine Basis von V.
   Bestimmen Sie alle reellen Zahlenpaare (α, β), für welche die Menge $\{\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}, \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{c}\}$ ebenfalls Basis von V ist.

Schriftliche Abiturprüfung 1989

Fach : Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach

Aufgabe 3

1. Bestimmen Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$$f(x) = 2 + \int_0^x f(t)\,dt.$$

2. Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{3}{2} - x^2$.
   Bestimmen Sie die Punkte auf der Parabel, die vom Koordinatenursprung minimalen Abstand haben. Wie groß ist dieser Abstand?

3. Gegeben ist die Funktion $f: \left]\frac{1}{2}, \infty\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln \frac{2x-1}{x+1}$.
   Zeigen Sie, daß die Funktion f eine Umkehrfunktion besitzt.
   Ermitteln Sie die Umkehrfunktion (Definitionsmenge und Funktionsterm).

Aufgabe 4

1. Beim Zufallsexperiment "Zweimaliges Werfen eines idealen Würfels" betrachtet man das Ereignis E: Die Augensumme ist mindestens 10.
   Wie oft muß man das Zufallsexperiment durchführen, damit mit mehr als 95%iger Sicherheit das Ereignis E wenigstens einmal eintritt?

2. In einer Fabrik werden zur Herstellung von optischen Gläsern die Maschinen M_1, M_2 und M_3 benutzt. M_1 stellt 25%, M_2 35% und M_3 40% der Gesamtproduktion her. Aus Erfahrung weiß man, daß 6% der von M_1, 3% der von M_2 und 2% der von M_3 hergestellten Gläser fehlerhaft sind.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig herausgegriffenes Glas, das fehlerhaft ist, von einer der Maschinen M_1 oder M_2 hergestellt wurde?

3. Zu einem Mathematikkurs gehören 3 Mädchen und 9 Jungen. Für ein Erinnerungsphoto stellt sich der Kurs in drei Viererreihen hintereinander auf einer Treppe auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei zufälliger Aufstellung die drei Mädchen in der ersten Reihe stehen?