SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 1990

Fach : Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

--- Die Aufgaben umfassen 4 Seiten ---

Aufgabe 1 : Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_t : D_{max} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto \frac{\ln(t \cdot x) + t}{x} \; , \; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

a) Geben Sie in Abhängigkeit von t die maximale Definitionsmenge an.

b) Berechnen Sie die Extremstellen und die Art der Extrema der Funktionen f_t . Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Extrempunkte liegen.

c) Zeigen Sie, daß für genau ein $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Graph der Funktion f_t an der Stelle $x = 1$ eine waagerechte Tangente hat, und geben Sie dieses t an.

d) Diskutieren Sie die Funktion f_1 .
(Zeichnung: 1 LE = 2cm)

e) Es sei $t > 0$.
Der Graph der Funktion f_t umschließt mit der x-Achse zwischen der Nullstelle und der Geraden mit der Gleichung

$x = \frac{1}{t} \cdot e^{1-t}$ eine Fläche. Zeigen Sie, daß ihr Inhalt unabhängig von t ist.

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 1990

Fach : Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden

Aufgabe 2a :

1. Gegeben ist die Ebene e : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   und die Geradenschar g_k : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie k so, daß $g_k \parallel e$ ist.

   b) Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene e' an, die zu e senkrecht ist und die Gerade

   $$g_0 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ enthält.

   c) Stellen Sie eine Gleichung der senkrechten Projektion g' der Geraden g_0 in e auf.

   d) Berechnen Sie den Abstand der Geraden g_0 von der Ebene e.

2. Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte $A\,(a / 0 / 0)$, $B\,(0 / a / 0)$, $C\,(0 / 0 / a)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ an, die vom Ursprung 0 den Abstand 1 hat.

Aufgabe 2b :

1. Sei P der Vektorraum der ganzrationalen Funktionen höchstens 2. Grades.
   Zeigen Sie, daß die durch die Terme 2 , $1 + x$, $1 - x^2$ definierten ganzrationalen Funktionen eine Basis von P bilden. Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors

   $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto 6x^2 + 4x - 10$$

   bezüglich dieser Basis.

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 1990

Fach : Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden

---

2. Beweisen Sie:

   Sei $V \neq \{\vec{o}\}$ ein Vektorraum. Ist $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Basis von V, dann läßt sich jeder Vektor aus V eindeutig als Linearkombination von $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ darstellen.

3. Seien U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraums V.

   $U_1 + U_2$ sei definiert durch:

   $$U_1 + U_2 = \{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \mid \vec{a}_1 \in U_1, \ \vec{a}_2 \in U_2\} .$$

   Zeigen Sie: $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$ sind Unterräume von V.

Aufgabe 3 :

1. Gegeben ist der Punkt P(3/2).
   Durch P soll eine Gerade so gezeichnet werden, daß die von ihr sowie den Koordinatenachsen begrenzte Dreiecksfläche im ersten Quadranten des Koordinatensystems minimal wird. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden und den Inhalt des Dreiecks.

2. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei I_n definiert durch:

   $$I_n = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$$

   Beweisen Sie durch partielle Integration die Gültigkeit der Beziehung

   $$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \quad , \ n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 1 \ .$$

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 1990

Fach : Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden

---

3. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto f(x)$.
   f ist in $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, f'' ist stetig in $\mathbb{R}$.
   Der Graph von f hat an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ die gleiche Steigung wie an der Stelle $b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

   $$\int_a^b f'(x) \cdot f''(x) \, dx = 0$$

Aufgabe 4 :

1. Eine Fabrik stellt Steckmodule mit einer Ausschußquote von 10% her.
   a) Ein Händler läßt eine Sendung zurückgehen, wenn sich in einer Stichprobe von 15 Stück mehr als 2 defekte Module befinden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Sendung zurückgewiesen wird. (Anmerkung : Die Stichproben werden mit Zurücklegen gezogen.)
   b) Um einen defekten Modul aufzuspüren, wird ein Prüfgerät eingesetzt. Es zeigt einen tatsächlichen Defekt mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 an. Fälschlicherweise werden auch einwandfreie Stücke mit der Wahrscheinlichkeit 0,01 als defekt angezeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Modul defekt, wenn ein Prüfgerät einen Defekt anzeigt ?

2. Rolf und Hans haben je zwei Steine, mit denen sie abwechselnd auf eine Flasche werfen. Rolf trifft mit der Wahrscheinlichkeit 1/4, Hans mit der Wahrscheinlichkeit 1/3. Rolf beginnt. Das Spiel ist beendet, wenn die Flasche getroffen ist oder alle 4 Steine geworfen sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Rolf bzw. Hans gewinnt. Zeichnen Sie zunächst ein Baumdiagramm.