Gegeben ist die Schar der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$f_a : x \longmapsto x^2 e^{-|x-a|}$ mit $0 \le a \le 1$. Der Graph der Funktion f_a wird mit G_a bezeichnet.

1. a) Geben Sie $f_a(x)$ abschnittsweise ohne Betragszeichen an. Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a und untersuchen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$. (4 BE)

   b) Es sei $0 \le a_1 < a_2 \le 1$. Untersuchen Sie, ob und an welchen Stellen die Graphen G_{a_1} und G_{a_2} gemeinsame Punkte haben. Unterscheiden Sie dazu die drei Bereiche $x \le a_1$, $a_1 < x < a_2$ und $a_2 \le x$. (9 BE)

2. a) Ermitteln Sie $f_a'(x)$ für $x \neq a$, und untersuchen Sie das Verhalten von $f_a'(x)$ bei Annäherung an die Stelle $x = a$. Zeigen Sie, daß f_0 die einzige Funktion der Schar ist, die in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. (7 BE)

   b) Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph G_a eine waagrechte Tangente hat. (5 BE)

   c) Berechnen Sie für die beiden Funktionen f_0 und f_1 die Funktionswerte an den Stellen −2, 0, 1, 2 (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet). Zeichnen Sie die Graphen G_0 und G_1 mit verschieden Farben unter Berücksichtigung aller Ergebnisse der vorausgegangenen Teilaufgaben (Querformat; Ursprung 5cm unterhalb der Blattmitte; Längeneinheit 5cm). (12 BE)

3. a) Eine Stammfunktion F_a von f_a im Bereich $x < a$ hat als Funktionsterm
   $F_a(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\cdot e^{x-a}$
   mit geeigneten Konstanten c_0, c_1, c_2. Bestimmen Sie diese Konstanten. (9 BE)

   b) Berechnen Sie den Inhalt $J(a)$ der Fläche im zweiten Quadranten, die sich zwischen G_a und der x-Achse ins Unendliche erstreckt. (4 BE)

Lösung

$$f_a(x) = x^2\cdot e^{-|x-a|}, \quad 0 \le a \le 1$$

1.a)
$$f_a(x) = \begin{cases} x^2\cdot e^{-(x-a)} = x^2\cdot e^{-x+a}, & \text{für } x \ge a \\ x^2\cdot e^{x-a}, & \text{für } x < a \end{cases}$$

- **Nullstellen**

i) "oberer Ast" $x^2\cdot e^{-(x-a)} = 0$ mit $x \ge a$;

wegen $e^{-(x-a)} > 0$ folgt: $x^2 = 0$, das heißt $x_1 = x_2 = 0$;
aufgrund von $x \ge a \ge 0$ stellen x_1, x_2 nur für $a = 0$ Lösungen dar.

ii) "unterer Ast" $x^2\cdot e^{x-a} = 0$ mit $x < a$;

wegen $e^{x-a} > 0$ folgt: $x^2 = 0$, das heißt $x_3 = x_4 = 0$; aufgrund von $x < a$ und $0 \le a \le 1$ stellen x_3, x_4 Lösungen dar. Die Funktion f_a besitzt eine einzige Nullstelle, die *Doppelnullstelle* $(0|0)$.

• **Randverhalten für $x \to +\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-(x-a)} = e^{a}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{-x}} = 0 \quad \text{(vgl. FS S.55)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\cdot e^{x-a} = e^{-a}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{x}} = \underline{0} \quad \text{(vgl. FS S.55)}$$

zusammenfassend: $\underline{\lim_{|x|\to\infty} f_a(x) = 0}$

b) $0 \le a_1 < a_2 < 1$: G_{a_1} und G_{a_2} besitzen gemeinsame Punkte $(x|y)$
$\Leftrightarrow f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$ also: $\quad x^2\cdot e^{-|x-a_1|} = x^2\cdot e^{-|x-a_2|}$;
Offenbar ist $(0|0)$ eine gemeinsame Stelle. Daher sei $x \neq 0$. Wendet man nach der Division durch x^2 auf beiden Seiten der Gleichung den *natürlichen* Logarithmus an ($\ln(e^x) = x$), so folgt: $-|x-a_1| = -|x-a_2|$; (*)

1. Lösungsweg

$$|x-a_1| = |x-a_2|$$

i) $x \le a_1 < a_2$
das heißt: $|x-a_1| = -(x-a_1)$, $|x-a_2| = -(x-a_2)$;
$\Rightarrow -(x-a_1) = -(x-a_2)$; $a_1 = a_2$;
Dies ist aber ein Widerspruch zu $a_1 < a_2$!

ii) $a_1 < x < a_2$
das heißt: $|x-a_1| = x-a_1$, $|x-a_2| = -(x-a_2)$;
$\Rightarrow x-a_1 = -(x-a_2)$; $2x = a_1+a_2$; $\underline{x = \frac{a_1+a_2}{2}}$;

iii) $a_1 < a_2 \le x$
das heißt: $|x-a_1| = x-a_1$, $|x-a_2| = x-a_2$
$\Rightarrow x-a_1 = x-a_2$; $a_1 = a_2$;
Dies ist wiederum ein Widerspruch zu $a_1 < a_2$!

zusammenfassend:

Die Graphen G_{a_1} und G_{a_2} haben genau an den Stellen $x = 0$ und $x = \frac{a_1+a_2}{2}$ einen Punkt gemeinsam.

2. Lösungsweg

Man quadriert die beiden Seiten der Gleichung (*). Somit erhält man:

$(x-a_1)^2 = (x-a_2)^2$; $x^2-2a_1\cdot x+a_1^2 = x^2-2a_2\cdot x+a_2^2$;

$2(a_2-a_1)\cdot x = a_2^2 - a_1^2$;

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2 - a_1} = \underline{\frac{1}{2}\cdot(a_1+a_2)}$$

(wie beim 1. Lösungsweg erkennt man: $a_1 < x_2 < a_2$)

2. Die Differentiation geschieht mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel:
<u>"oberer Ast" von $f_a(x)$:</u>

$$\begin{aligned}[x^2\cdot e^{-(x-a)}]' &= [x^2]'\cdot e^{-(x-a)} + x^2\cdot[e^{-(x-a)}]' = \\ &= 2x\cdot e^{-(x-a)} + x^2\cdot[-(x-a)]'\cdot e^{-(x-a)} = \\ &= 2x\cdot e^{-(x-a)} + x^2\cdot(-1)\cdot e^{-(x-a)};\end{aligned}$$

"unterer Ast" von $f_a(x)$:

$[\ x^2 \cdot e^{x-a}\ ]'$ = (analoger Weg zu oben) = $2x \cdot e^{x-a} + x^2 \cdot e^{x-a}$;

zusammenfassend erhält man durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren:

$$f_a'(x) = \begin{cases} x \cdot (2-x) \cdot e^{-(x-a)}, & \text{für } x > a \\ x \cdot (2+x) \cdot e^{x-a}, & \text{für } x < a \end{cases}$$

$f_a(x)$ ist in $x = a$ stetig und die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f_a'(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f_a'(x)$ existieren:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f_a'(x) = a \cdot (2-a) \cdot e^{-(a-a)} = (e^0=1) = \underline{2 \cdot a - a^2\ ;}$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f_a'(x) = a \cdot (2+a) \cdot e^{a-a} = (e^0=1) = \underline{2 \cdot a + a^2\ ;}$$

Daher gilt: f_a ist in $x = a$ differenzierbar

<=> $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f_a(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f_a(x)$

$f_a'(x)$ in $x = a$ differenzierbar <=> $2 \cdot a - a^2 = 2 \cdot a + a^2$; <=> $\underline{a = 0}$

Ergebnis:
Nur für $a = 0$ ist die Funktion $f_a(x)$ in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

b) Der Graph G_a besitzt in x eine *waagrechte* Tangente <=> $f_a'(x) = 0$ (Dabei wird vorausgesetzt, daß $f_a(x)$ an dieser Stelle x differenzierbar ist.)

i) "oberer Ast von $f_a'(x)$"

$x > a$ (und $0 \le a \le 1$) : $x \cdot (2-x) \cdot e^{-(x-a)} = 0$; ($e^{-(x-a)} \neq 0$)
=> $x_1 = 0$, $\underline{x_2 = 2}$
Nur x_2 erfüllt die obigen Ungleichungen, x_2 ist also alleinige Lösung.

ii) "unterer Ast von $f_a'(x)$"

$x < a$ (und $0 \le a \le 1$): $x \cdot (2+x) \cdot e^{x-a} = 0$; ($e^{x-a} \neq 0$) => $\underline{x_3 = 0,\ x_4 = -2}$

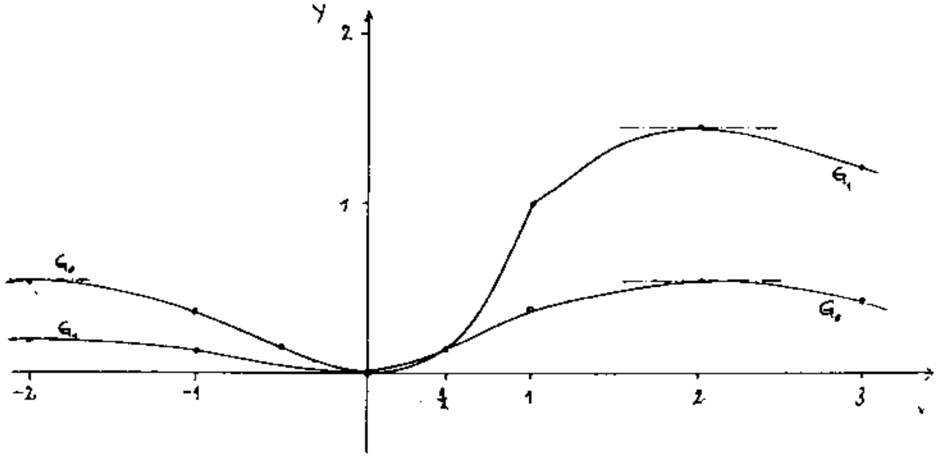
x_3 und x_4 erfüllen die obigen Ungleichungen, sie sind beide Lösungen.

Zusammenfassend: Der Graph G_a hat in $x_4 = -2$, $x_3 = 0$ und in $x_2 = 2$ eine waagrechte Tangente.

c) Wertetabelle:

x	-2	0	1	2
$f_0(x)$	0,54	0	0,37	0,54
$f_1(x)$	0,20	0	1	1,47

Die Graphen G_0 und G_1:



3.a) $F_a(x) = (c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2) \cdot e^{x-a}$

$F_a(x)$ ist eine *Stammfunktion* von $f_a(x)$ (für $x < a$)

$\Leftrightarrow$

$F_a'(x) = f_a(x)$ (unterer Ast mit $x < a$)

Mit der Produktregel folgt:

$$F_a'(x) = [c_0+c_1x+c_2x^2]' \cdot e^{x-a} + (c_0+c_1x+c_2x^2) \cdot [e^{x-a}]'$$
$$= (c_1+2c_2x) \cdot e^{x-a} + (c_0+c_1x+c_2x^2) \cdot e^{x-a}$$
$$= \underline{[(c_0+c_1) + (2c_2+c_1) \cdot x + c_2 \cdot x^2] \cdot e^{x-a}}$$

(für $x < a$ gilt:) $f_a(x) = x^2 \cdot e^{x-a}$

Bedingung: $F_a'(x) = f_a(x)$ für *alle* x mit $x < a$ => (mit $e^{x-a} \neq 0$)

$(c_0+c_1) + (2c_2+c_1) \cdot x + c_2 \cdot x^2 = x^2$; (*)

Die Gleichung (*) muß für *alle* x ($x < a$) *identisch* erfüllt sein. (Es handelt sich also nicht um eine Gleichung in *einer* Unbekannten x!)
Die Polynome auf beiden Seiten von (*) sind gleich, wenn gilt (Koeffizientenvergleich der Glieder mit der gleichen Potenz):

I) $c_0 + c_1 = 0$; II) $2c_2 + c_1 = 0$; III) $c_2 = 1$;

Durch Einsetzen erhält von III) in II) erhält man: $c_1 = -2$; dies in I): $c_0 = 2$;

zusammenfassend:
$F_a(x) = (2-2x+x^2) \cdot e^{x-a}$ ist eine Stammfunktion von $f_a(x)$ für $x < a$.

b) Der Inhalt J(a) wird durch Integration und anschließender Absolutbildung des Integrationswertes ermittelt:

$$J(a) = \left| \lim_{x \to -\infty} \int_0^x f_a(t)dt \right| = (x < a) = \left| \lim_{x \to -\infty} \int_0^x t^2 \cdot e^{t-a}\, dt \right| ;$$

Es handelt sich hier um ein *uneigentliches* Integral.

Mit der oben ermittelten *Stammfunktion* $F_a(x)$ (in diesem Bereich $x < a$) folgt:

$$J(a) = \left| \lim_{x \to -\infty} [F_a(t)]_0^x \right| = \left| \lim_{x \to -\infty} [F_a(x) - F_a(0)] \right| =$$

(mit $F_a(0) = 2 \cdot e^{-a}$)

$$= \left| \lim_{x \to -\infty} [(2-2x+x^2) \cdot e^{x-a} - 2 \cdot e^{-a}] \right| ;$$

Es gilt:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{x-a} = \lim_{x \to +\infty} (-x)^2 \cdot e^{-x-a} = e^{-a} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = e^{-a} \cdot 0 = 0 \;;$$

(vgl. hierzu FS S.55)

Analog: $\lim_{x \to -\infty} 2 \cdot e^{x-a} = \lim_{x \to -\infty} 2x \cdot e^{x-a} = 0$;

zusammenfassend: $\underline{J(a) = 2 \cdot e^{-a}}$

Leistungskurs Mathematik Abiturprüfung 1987
Aufgabe II: Infinitesimalrechnung

Gegeben ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f: x \longmapsto \arccos \frac{1}{\sqrt{|x|+1}}$$

Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Untersuchen Sie f auf Symmetrie und Nullstellen. Wie verhält sich f(x) für $|x| \to \infty$? (3 BE)

   b) Zeigen Sie, daß für $x > 0$ gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)}$.

   Geben Sie f'(x) für $x < 0$ an, und untersuchen Sie, wie sich f'(x) und der Graph G_f in der Umgebung von $x = 0$ verhalten. (7 BE)

   c) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche und das Extremum von f. (2 BE)

   d) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{2}$; 1; 2 und 3 (auf zwei zwei Stellen nach dem Komma gerundet). Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm; Ursprung in der Blattmitte). (6 BE)

2. Die Einschränkung der Funktion f auf die Definitionsmenge $\mathbb{R}^+_0$ hat eine Umkehrfunktion g.

   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g in der Form $x = g(y)$ und geben Sie die Definitionsmenge D_g und die Wertemenge W_g an. (4 BE)

   b) Zeigen Sie, daß für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\underline{f(x) = \arctan\sqrt{|x|}}$. (4 BE)

3. Gegeben ist die Funktion $F: x \longmapsto \int_0^x \arctan\sqrt{|t|}\,dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

   a) Begründen Sie ohne Berechnung des Integrals: F besitzt genau eine Nullstelle, und der Graph G_F von F hat dort einen Terrassenpunkt. (3 BE)

   b) Stellen Sie F(x) für $x \geq 0$ integralfrei dar. Beginnen sie dazu mit der Substitution $z = \sqrt{t}$. (9 BE)

   [Zur Kontrolle: $F(x) = (x+1)\cdot\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}$]

   c) Die Graphen der Funktionen $g: x \longmapsto g(x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} - 1$ und $h: x \longmapsto h(x) = \frac{\pi}{2}x - 1$ sind Geraden durch den Punkt $(1|F(1))$ (Nachweis nicht erforderlich). Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Differenzfunktionen D_1: $x \longmapsto F(x) - g(x)$ und D_2: $x \longmapsto h(x) - F(x)$ im Bereich $x > 1$. (6 BE)

   d) Skizzieren Sie in das angelegte Koordinatensystem den Graphen G_F sowie im Bereich $x \geq 1$ die Graphen von g und h unter Verwendung der Ergebnisse der Teilaufgaben 3.a und 3.c. (6 BE)

Lösung

$$f(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{|x|+1}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

1.a) • **Symmetrie**

$$f(-x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{|-x|+1}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{|x|+1}} = f(x) \; ;$$

=> G_f ist zur y-Achse *achsensymmetrisch.*

• **Nullstellen** (Es gilt: $\arccos z = 0 \Leftrightarrow z = 1$)

$$\underline{f(x) = 0} \Leftrightarrow \arccos \frac{1}{\sqrt{|x|+1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{|x|+1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{|x|+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow |x|+1 = 1 \Leftrightarrow \underline{x = 0}$$

Der Ursprung $(0|0)$ ist die *einzige* Nullstelle des Graphen G_f.

• **Randverhalten**

$$\lim_{|x|\to\infty} \arccos \frac{1}{\sqrt{|x|+1}} = \arccos\Big(\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|+1}} \Big) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

b) Ableitung für $x > 0$: $\quad (x>0 \Rightarrow |x| = x)$

$$f(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \arccos(x+1)^{-0.5} \; ;$$

Vorwissen: $y = \arccos z \quad \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

Kettenregel:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{x+1}} = \underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}} \; ;$$

Auf Grund der Achsensymmetrie von $f(x)$ muß $f'(x)$ *punktsymmetrisch* sein. Für $x < 0$ gilt also: (Übergang: $x \to -x$ und Vorzeichenwechsel der Ableitung)

$$\underline{f'(x) = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{-x}\cdot(-x+1)}} \; .$$

G_f ist *stetig* und

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = +\infty$, (da der Zähler gleich 1 ist und im Nenner $\sqrt{x}$ steht!)

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = -\infty$.

Ergebnis: f ist zwar in $x = 0$ *stetig*, aber *nicht differenzierbar* (es liegt hier eine *Spitze* vor).

c) Für $x > 0$ ist $f'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(x+1)} > 0$,

also ist G_f rechts von $x = 0$ streng monoton steigend. Da G_f achsensymmetrisch ist, muß G_f links von $x = 0$ streng monoton fallend sein. Somit ist der Ursprung $(0|0)$ das einzige *Minimum*.

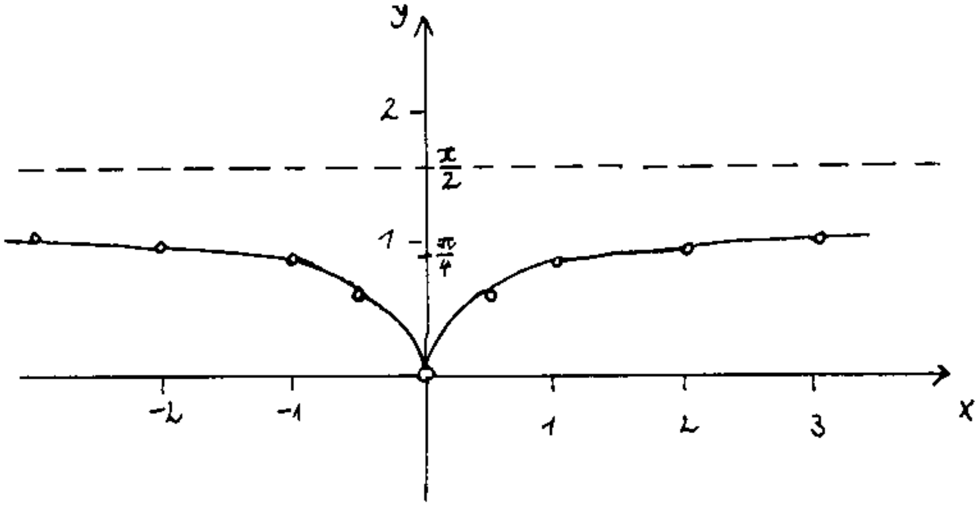
d) $f(\frac{1}{2}) = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{0{,}5+1}} = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0{,}62$;

$f(1) = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = \arccos \dfrac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}79$;

$f(2) = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}96$;

$f(3) = \arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3} \approx 1{,}05$;

Mit $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ (vgl. Aufgabe 1.a) ergibt sich somit der Graph G_f wie folgt:



2. $f: x \longmapsto \arccos \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \qquad (x \geq 0)$

a) • **Umkehrfunktion**

Die Umkehrfunktion wird durch Auflösen der Funktionsgleichung nach x bestimmt:

$\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; $\quad \sqrt{x+1} = \dfrac{1}{\cos y}$; $\quad x+1 = \dfrac{1}{\cos^2 y}$;

$x = \dfrac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}$; $\quad x = \dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 y}$; $\quad \Rightarrow \quad g(y) = x = \tan^2 y$;

(Vertauschen von x und y ergibt: $g(x) = y = \tan^2 x$)

• **Definitionsmenge, Wertemenge**

$D_g = W_{f^*} = [0;\frac{\pi}{2}[$; $W_g = D_{f^*} = [0;\infty[$.

Dabei ist f^* die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}_0^+$: $f^*(x) = f(x)$,
$x \in D_{f^*} = \mathbb{R}_0^+$.

b) Man löst $x = \tan^2 y$ wieder nach y auf: $\tan y = \sqrt{x}$;

(Wegen $y \in [0;\frac{\pi}{2}[$ scheidet die zweite Lösung $\tan y = -\sqrt{x}$ aus!)

$\Rightarrow \quad y = \arctan \sqrt{x}$

Also gilt für $x \geq 0$: $f(x) = \arctan \sqrt{x}$.

Wegen der Achsensymmetrie des Graphen G_f folgt für $x \leq 0$:
$f(x) = \arctan \sqrt{-x}$ und somit *zusammenfassend* für $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \arctan \sqrt{|x|}$.

(Also: $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{|x|+1}} = \arctan \sqrt{|x|}$)

3. $F(x) = \int_0^x \arctan\sqrt{|x|}\, dt \quad (x \in \mathbb{R})$

a) • **Einzige Nullstelle**

Offenbar ist $F(0) = 0$. (Untere Integrationsgrenze = obere Integrationsgrenze!) Dem Graphen G_f in 1.d entnimmt man, daß für $x > 0$ auch $F(x) > 0$ ist. Da G_f achsensymmetrisch ist, muß G_F *punkt*symmetrisch sein, so daß $F(x) < 0$ für $x < 0$ gilt.

Also ist $x = 0$ die *einzige Nullstelle* von F.

• **Terrassenpunkt**

$F'(x) = f(x) = \arctan \sqrt{|x|}$

Es ist weiter: $F'(0) = 0$ und $F'(x) > 0$ für $x \neq 0$.

G_F ist also *streng monoton steigend* und besitzt in $(0|0)$ eine waagrechte Tangente. Somit ist der Ursprung $(0|0)$ Terrassenpunkt von G_F.

b) $$F(x) = \int_0^x \arctan\sqrt{t}\, dt \quad (x \geq 0)$$

Zuerst ermittelt man eine *Stammfunktion* von $\arctan\sqrt{t}$:

• **Substitution**

$z = \sqrt{t}$; $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{t}}$; $\quad dt = 2\cdot\sqrt{t}\, dz$; $\quad dt = 2\cdot z\, dz$;

$\Rightarrow \quad \int \arctan\sqrt{t}\, dt = 2 \int z\cdot \arctan z\, dz \qquad (z = \sqrt{t})$

Zur Berechnung von $\int z\cdot\arctan z\, dz$ bietet sich partielle Integration an:

• **Partielle Integration**

$$\int \underset{u'}{z}\cdot \underset{v}{\arctan z}\, dz = \underset{u}{\frac{z^2}{2}} \cdot \underset{v}{\arctan z} - \int \underset{u}{\frac{z^2}{2}} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{1+z^2}}\, dz =$$

$$= \frac{z^2}{2} \cdot \arctan z - \frac{1}{2} \int \frac{z^2}{1+z^2}\, dz = \frac{z^2}{2} \cdot \arctan z - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1+z^2}{1+z^2} - \frac{1}{1+z^2}\right) dz =$$

$$= \frac{z^2}{2} \cdot \arctan z - \frac{1}{2}(z - \arctan z) = \frac{1}{2}\cdot t\cdot \arctan\sqrt{t} - \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{t} - \arctan\sqrt{t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(t+1)\cdot\arctan\sqrt{t} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{t}\ ;$$

Zusammenfassend ergibt sich:

$$F(x) = \int_0^x \arctan\sqrt{t}\, dt = 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(t+1)\cdot\arctan\sqrt{t} - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right]_0^x =$$

$$= (x+1)\cdot\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}\ ;$$

c) g: $y = \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} - 1$; h: $y = \frac{\pi}{2}x - 1$

(*Anmerkung:* Die Wahl des Buchstabens g ist hier etwas unglücklich, weil mit g bereits die Umkehrfunktion von f (auf $\mathbb{R}_0^+$) bezeichnet wurde!)

Zur Untersuchung des *Monotonieverhaltens* von D_1 und D_2 bestimmt man die zugehörigen Ableitungen:

$$D_1'(x) = F'(x) - g'(x) = f(x) - \frac{\pi}{4} = \arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{4} \qquad \text{und}$$

$$D_2'(x) = h'(x) - F'(x) = \frac{\pi}{2} - f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{x}\ .$$

Für alle $x > 1$ gilt $\sqrt{x} > 1$, also $\frac{\pi}{4} < \arctan\sqrt{x} < \frac{\pi}{2}$.

Dabei wird benützt, daß
* $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$;
* arctan streng monoton steigend ist und
* $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

Hieraus erhält man: $D_1' > 0$ und $D_2' > 0$ für alle $x > 1$.

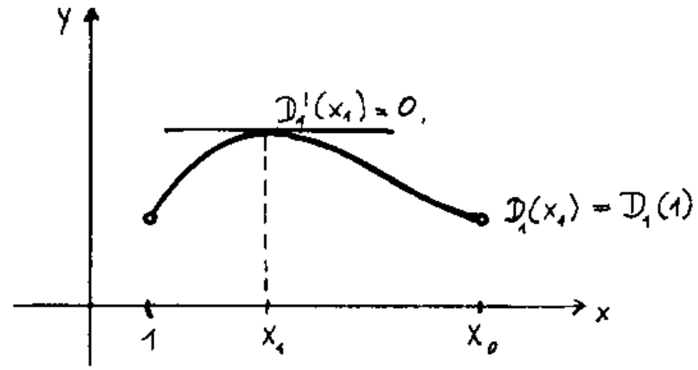
Ergebnis: Die Differenzfunktionen D_1' und D_2' sind im Bereich $x > 1$ streng monoton steigend.

d) Offensichtlich liegt der Graph G_F von F im Bereich $x \geq 1$ zwischen den Geraden g und h (in der "spitzwinkligen Schere"). Diesem anschaulichen Argument liegt folgender mathematische Sachverhalt zugrunde:

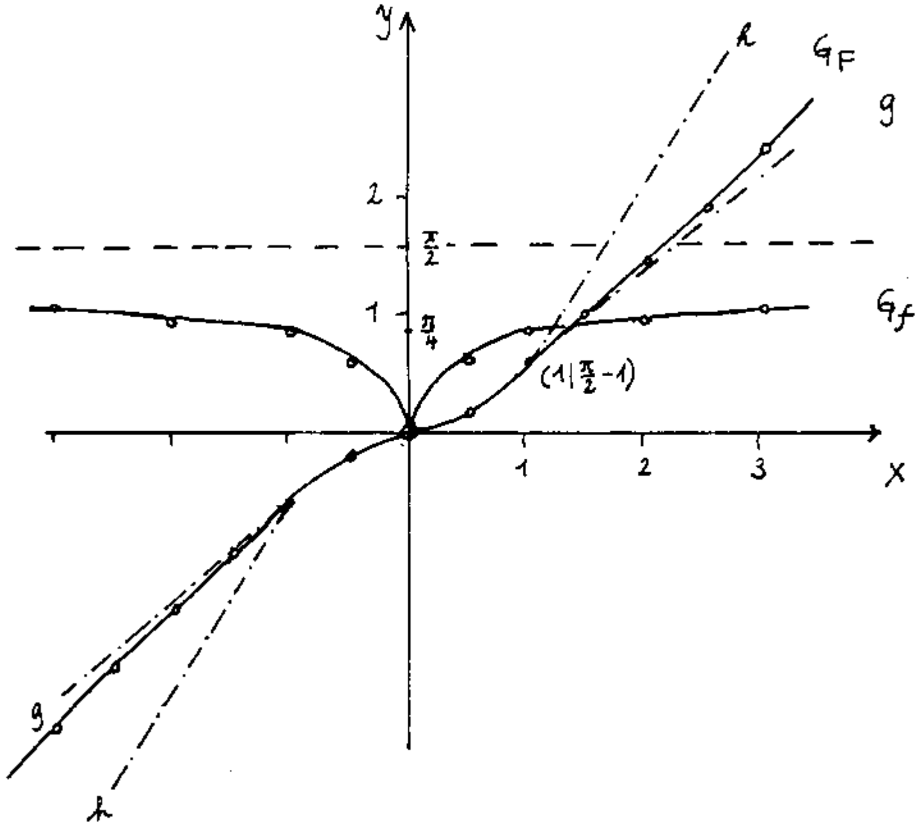
Es gilt:
* $F(1) = g(1)$;
* $F'(x) > g'(x)$ für alle $x > 1$ (wegen $D_1'(x) > 0$)

$\Rightarrow$ $\underline{F(x) > g(x)}$,

denn wäre für ein $x_0 > 1$ $F(x_0) = g(x_0)$, also $D_1(x_0) = D_1(1) = 0$, so existiert nach dem *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung ein $x_1 \in\ ]1;x_0[$, so daß $D_1'(x_1) = 0$:



Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $D_1'(x) > 0$ für alle $x > 1$ ist. $F(x) > g(x)$ bedeutet aber, daß G_F *oberhalb* der Geraden g liegt. Analog liegt der Graph von F unterhalb der Geraden h.
Der Graph G_F hat folgenden Verlauf:



Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1987
Aufgabe III: Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Auf dem Weg zur Arbeitsstätte hat ein Autofahrer 2 Verkehrsampeln und dann einen Bahnübergang zu passieren. Unabhängig voneinander hat er an den Ampeln mit je 30%, am Bahnübergang mit 90% Wahrscheinlichkeit freie Fahrt. An jeder Ampel muß er mit 40% Wahrscheinlichkeit nur 1 Minute, mit 30% Wahrscheinlichkeit 2 Minuten warten; am Bahnübergang hat er mit 10% Wahrscheinlichkeit eine Wartezeit von 3 Minuten.
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen X_i := Wartezeit an der Ampel i (i = 1,2) und Y := Wartezeit am Bahnübergang, und berechnen Sie damit Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße Z := Gesamtwartezeit. (8 BE)

b) Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit ist die Wartezeit an Ampeln und Bahnübergang zusammen mindestens 5 Minuten, wenn der Autofahrer an der ersten Ampel 2 Minuten warten muß? (5 BE)

2. Auf dem Weg von der Wohnung zu seiner Arbeitsstätte hat ein anderer Autofahrer insgesamt 15 Ampeln zu passieren, die unabhängig voneinander geschaltet sind. Erfahrungsgemäß kann er jede Ampel mit 30% Wahrscheinlichkeit ohne Wartezeit passieren. Ansonsten muß er mit einer mittleren Wartezeit von 1 Minute pro Ampel rechnen.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt frühestens die 6. Ampel Rot? (3 BE)
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er auf einer Fahrt mehr als die Hälfte der Ampeln bei Grün und kann diese also ohne Verzögerung passieren? (3 BE)
   c) Im Jahr fährt er 230 mal von der Wohnung zur Arbeitsstätte. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall symmetrisch zum Erwartungswert, in dem die gesamte Wartezeit G vor den Ampeln pro Jahr bei seinen Fahrten zur Arbeitsstätte mit mindestens 90% Sicherheit liegt. (6 BE)

3. Eine umfangreiche Auswertung der Fahrzeiten von der Wohnung zur Arbeitsstätte hat ergeben, daß die Zufallsgröße T := Fahrzeit normalverteilt ist mit Erwartungswert 30 Minuten und Standardabweichung 4,75 Minuten.
   a) Als "normal" soll eine Fahrt gelten, wenn die Fahrzeit um höchstens 6 Minuten vom Erwartungswert abweicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann eine beliebig herausgegriffene Fahrt "normal"? Mit wie vielen "normalen" Fahrten kann man bei 230 Fahrten pro Jahr rechnen? (5 BE)
   b) Welche Fahrzeit t_0 muß der Autofahrer ansetzen, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Fahrzeit, die länger als t_0 ist, nur $\frac{1}{230}$ beträgt, d.h., daß er im Mittel pro Jahr einmal zu spät zur Arbeit kommt? (4 BE)

4. Ein Autofahrer behauptet, daß die Wahrscheinlichkeit, mit der er zu spät zur Arbeit kommt, höchstens 1% beträgt. Kann er mit einem Signifikanzniveau von 5% seine Behauptung noch aufrecht erhalten, wenn er bei den letzten 150 Fahrten 4 mal zu spät gekommen ist? Formulieren Sie mit Hilfe der Poisson-Näherung eine Entscheidungsregel und wenden Sie diese an! (6 BE)

Lösung

1. Es gelten folgende Abkürzungen: A: Ampel, B: Bahnübergang

   Freie Fahrt an der Ampel i / am Bahnübergang <=> Wartezeit x_0 an der Ampel i / Wartezeit y am Bahnübergang ist Null (x_i=y=0 für i = 1,2)
   Aus dem Text liest man ab:

   $p_A(x_i = 0) = 0{,}3$; $p_B(y = 0) = 0{,}9$;
   $p_A(x_i = 1) = 0{,}4$; $p_A(x_i = 2) = 0{,}3$;
   $p_B(y = 3) = 0{,}1$ (mit i = 1,2).
   (Wartezeiten x_1, x_2 und y in Minuten.)

   a) • **Zufallsgrößen X_i (i = 1,2)**
   Die Zufallsgrößen X_i (i = 1,2) nehmen jeweils die Werte 0,1,2 (in Minuten) an. Somit ergeben sich mit obigen Größen die folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

x (in min)	0	1	2
$P(X_i = x)$	0,3	0,4	0,3

• **Zufallsgröße Y**

Die Zufallsgröße Y nimmt die Werte 0 und 3 Minuten an. Somit ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

y (in min)	0	3
P(Y = y)	0,9	0,1

.

• **Zufallsgröße Z**: $Z = X_1 + X_2 + Y$;

Gesucht: Erwartungswert E(Z) und Varianz Var(Z) der Gesamtwartezeit Z

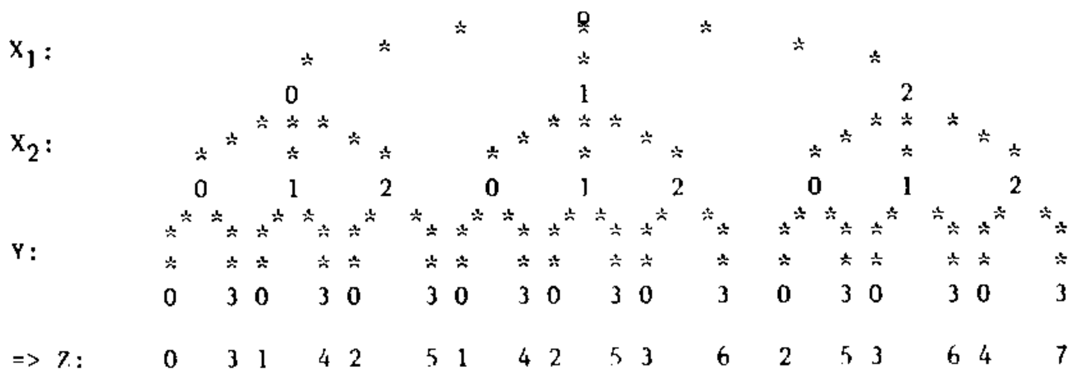
1. Weg: Berechnung mit Hilfe der Zufallsgrößen X_1,X_2 und Y

Es gilt (vgl. FS, S.108):
$E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + E(Y)$; $E(X_1) = 0\cdot0,3+1\cdot0,4+2\cdot0,3 = 1$ (in min) ;
$E(x_2) = E(X_1) = 1$ (in min) ; $E(Y) = 0\cdot0,9+3\cdot0,1 = 0,3$ (in min) ;
=> $\underline{E(Z)} = 1 + 1 + 0,3 = \underline{2,3}$ (in min)

$Var(Z) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(Y)$; (Unabhängigkeit der Größen)
$Var(X_1) = 0^2\cdot0,3+1^2\cdot0,4+2^2\cdot0,3-1^2 = 0,6$ (in min²) ;
$Var(X_2) = Var(X_1) = 0,6$ (in min²) ; ($Var(Z) = E(Z^2)-(E(Z))^2$)
$Var(Y) = 0^2\cdot0,9+3^2\cdot0,1-0,3^2 = 0,81$ (in min²) ;
=> $\underline{Var(Z)} = 0,6 + 0,6 + 0,81 = \underline{2,01}$ (in min²)

2. Weg: Berechnung mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Z

Zu diesem Zweck zeichnet man sich den dreistufigen Baum mit den Stufen 1. Ampel, 2. Ampel und Bahnübergang an:



Mit den obigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ergibt sich somit aus diesem Baumdiagramm:

z (in min)	0	1	2	3	4	5	6	7
P(Z = z)	0,081	0,216	0,306	0,225	0,105	0,034	0,024	0,009

$\underline{E(Z)} = 0\cdot0,081+1\cdot0,0216+2\cdot0,306+3\cdot0,225+4\cdot0,105+5\cdot0,034+6\cdot0,024+$
$7\cdot0,009 = \underline{2,3}$ (in min)

$\underline{Var(Z)} = 0^2\cdot0,081+1^2\cdot0,216+2^2\cdot0,306+3^2\cdot0,225+4^2\cdot0,105+$
$+5^2\cdot0,034+6^2\cdot0,024+7^2\cdot0,009-2,3^2 =$
$= 7,3 - 5,29 = \underline{2,01}$ (in min)

(Dieser *direkte* Wege zur Berechnung von Erwartungswert und Varianz von Z ist offensichtlich weitaus umfangreicher als Weg 1!)

b) Gesucht ist die *bedingte* Wahrscheinlichkeit: $p_{x_1=2}$ (Z ≥ 5). Aufgrund der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$p_{x_1=2}\ (z \geq 5) = \frac{p(x_1 = 2 \text{ und } z \geq 5)}{p(x_1 = 2)} \quad . \quad (*)$$

Das Ereignis "$x_1 = 2$ und $z \geq 5$" besteht aus den Ergebnissen (vgl. Baum im 2. Lösungsweg von Aufgabe 1. a):
$(x_1=2|x_2=0|y=3)$, $(x_1=2|x_2=1|y=3)$, $(x_1=2|x_2=2|y=3)$.

Mit den gegebenen Wahrscheinlichkeitverteilungen folgt daher:
$p(x_1 = 2 \text{ und } z \geq 5) = 0,3\cdot0,3\cdot0,1 + 0,3\cdot0,4\cdot0,1 + 0,3\cdot0,3\cdot0,1 = 0,03.$

Mit $p(x_1 = 2) = 0,3$ folgt schließlich (vgl. (*)):

$$\underline{p_{x_2}\ (z \geq 5)} = \frac{0,03}{0,3} = \underline{0,1}.$$

2.a) Frühestens die 6. Ampel zeigt Rot heißt: Die ersten 5 Ampeln stehen auf Grün. Mit p("keine Wartezeit") = 0,3 folgt:
<u>p("frühestens die 6. Ampel zeigt Rot") = $0,3^5$ = 0,243%.</u>

b) Es handelt sich hier um eine Bernoullikette der Länge n = 15 mit dem Parameter p = 0,3. (Treffer = "Passieren einer Ampel ohne Wartezeit") Mit der Trefferanzahl X gilt somit:

$$\underline{P(X \geq 8)} = \sum_{i=8}^{15} B(15;0,3;i) = 1 - \sum_{i=0}^{7} B(15;0,3;i) = 1 - 0,94999 =$$
$$= 0,05001 \approx \underline{5\%} \quad \text{(vgl. Stochastik-Tabelle).}$$

c) Es handelt sich nun um eine Bernoullikette der Länge $n = 230\cdot15 = 3450$ mit dem Parameter p = 0,7 (Treffer = "Wartezeit an einer Ampel"). Da die durchschnittliche Wartezeit an einer Ampel 1 Minute beträgt, gilt für den Erwartungswert E(G) und die Varianz Var(G) der Gesamtwartezeit G:

$$E(G) = n\cdot p\cdot 1\text{min} = 3450\cdot0,7\text{min} = 2415\text{min} ;$$
$$Var(G) = n\cdot p\cdot q\cdot 1\text{min}^2 = 3450\cdot0,7\cdot0,3\text{min}^2 = 724,5\text{min}^2 ;$$

Die Tschebyschowungleichung zur gegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90% lautet (vgl. FS, S.109):

$$P(|G - E(G)| < a) \geq \underbrace{1 - \frac{Var(G)}{a^2} \geq 0,9}\ .$$

Der Wert von a legt dabei die Länge des Sicherheitsintervalls um den Erwartungswert E(G) fest. Es ist also der Wert von a zu bestimmen. Man liest ab:

$$1 - \frac{Var(G)}{a^2} \geq 0,9 ; \qquad \frac{Var(G)}{a^2} \leq 0,1;$$

$$a^2 \geq 10\cdot Var(G) ; \qquad \Rightarrow \qquad a \geq 85,12\text{min} ;$$

Das kleinstmögliche a lautet somit 85,12min.

Das gesuchte Intervall ergibt sich aus:

$$|G - E(G)| < 85,12\text{min} ;$$
$$2415\text{min} - 85,12\text{min} < G < 2415\text{min} + 85,12\text{min} ;$$
$$\underline{2329,88\text{min} < G < 2500,12\text{min}}$$

3. Gegeben ist die *normalverteilte* Zufallsgröße T = "Fahrzeit" (in min). Erwartungswert μ von T: $\mu = 30$ (in min); Standardabweichung σ von T: $\sigma = 4,75$ (in min);

a) • **Wie wahrscheinlich ist eine "normale" Fahrt?**

Da T normalverteilt ist, gilt mit der Gaußschen ϕ-Funktion:

$\underline{p(|\mu - T| \le 6)} = p(\mu-6 \le T \le \mu+6) =$

$= p(T \le \mu+6) - p(T \le \mu-6) = \phi(\frac{(\mu+6)-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{(\mu-6)-\mu}{\sigma}) =$

$= \phi(\frac{6}{\sigma}) - \phi(-\frac{6}{\sigma}) = 2\phi(\frac{6}{\sigma}) - 1$ (denn es gilt: $\phi(-x) + \phi(x) = 1$)

$= 2\cdot 0{,}89617 - 1 = 0{,}79234 \approx \underline{79{,}2\%}$

• **Wie viele "normale" Fahrten gibt es?**

Nach oben beträgt die Wahrscheinlichkeit p für eine "normale" Fahrt $p = 79{,}2\%$. Die Anzahl A solcher Fahrten ergibt sich bei $n = 230$ Fahrten zu:
$A = n\cdot p = 230\cdot 0{,}729 \approx 182$;
Der Fahrer kann also mit zirka 182 "normalen" Fahrten rechnen.

b) Gefordert ist: $p(T \ge t_0) \overset{(<)}{=} \frac{1}{230}$;

(Eine kleinere Wahrscheinlichkeit als $\frac{1}{230}$ ist für den Fahrer ebenfalls günstig.)

$\Rightarrow p(T \le t_0) \overset{(>)}{=} 1 - \frac{1}{230} \approx 0{,}99565$;

Mit $\mu = 30$ (in min) und $\sigma = 4{,}75$ (in min) folgt:

$p(T \le t_0) = \phi(\frac{t_o-\mu}{\sigma}) \overset{(>)}{=} 0{,}99565$;

Durch Nachschlagen in der Stochastik-Tabelle (Normalverteilung) erhält man:

$\frac{t_o-\mu}{\sigma} \overset{(>)}{=} 2{,}63$; $\Rightarrow t_o \overset{(>)}{=} 2{,}63\cdot\sigma+\mu$; $t_o \overset{(>)}{=} 42{,}49$;

Der Autofahrer muß für t_o eine Zeit von 42,49 Minuten ansetzen.

4. Es handelt sich hier um einen Alternativtest mit den beiden Hypothesen

H_1: Die Wahrscheinlichkeit p für das Zuspätkommen beträgt höchstens 1%:
$p \le 0{,}01$,

H_2: Die Wahrscheinlichkeit p für das Zuspätkommen liegt über 1%:
$p > 0{,}01$.

Die Stichprobenlänge beträgt $n = 150$. Damit ergeben sich die Annahmebereich A_1 (zur Hypothese H_1) und A_2 (zur Hypothese H_2)zu:

$A_1 = \{0, \dots ,c\}$, $A_2 = \{c+1, \dots ,150\}$.

Hierbei ist $c \in \mathbb{N}$ eine Konstante, die durch die Angabe bestimmt ist, daß das Signifikanzniveau 5% beträgt.(Ein kleineres Signifikanzniveau als 5% spricht ebenso für den Autofahrer.) Ein Signifkikanzniveau bezieht sich auf den α-Fehler (Hypothese H_1 trifft zu, sie wird aber abgelehnt). Somit kann angesetzt werden:

$$P_{150;0{,}01}(A_2) \ge 0{,}05 \; ; \quad (*)$$

Da eine Poisson-Näherung verwendet werden soll, wird zunächst der Mittelwert μ bestimmt:

$$\mu = n\cdot p = 150\cdot 0{,}01 = 1{,}5.$$

Mit der Poisson-Verteilung $P(\mu;i)$ folgt aus (*):

$$\sum_{i=c+1}^{150} P(1,5;i) \le 0,05 \;;$$

$$1 - \sum_{i=0}^{c} P(1,5;i) \le 0,05 \;;$$

$$\sum_{i=0}^{c} P(1,5;i) \ge 0,95 \;;$$

Durch Nachschlagen in der Stochastik-Tabelle (Poisson-Verteilung) findet man, daß die obige Ungleichung für $c \ge 4$ erfüllt ist. Die Behauptung des Autofahrers (Hypothese H_1) kann somit aufrecht erhalten werden.

Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1987
Aufgabe IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Weiße Natursteinplatten werden in Paketen zu je 100 Platten geliefert. Die Pakete werden je nach der Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten rötlich verfärbter Platten (kurz: rote Platten), die bei der Produktion zwangsläufig anfallen, in drei Güteklassen eingeteilt:
Güteklasse I: $p = 0,01$; Güteklasse II: $p = 0,05$; Güteklasse III: $p = 0,10$.

1. Auf einem Weg sollen 100 Platten in einer Reihe verlegt werden. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind möglich,

   a) wenn das gelieferte Paket genau zwei rote Platten enthält, und sich die Platten nur in der Farbe (weiß,rot) unterscheiden, (3 BE)

   b) wenn das gelieferte Paket genau 3 rote Platten enthält, und diese untereinander (etwa nach der Maserung) unterscheidbar sind, die weißen Platten aber nicht? (4 BE)

2. a) Zur Pflasterung des gleichen Wegs wie in 1. wird ein Paket der Güteklasse I bestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keine roten Platten dabei sind? (4 BE)

   b) Bis zu 12 rote Platten werden beim Plastern des Weges in Kauf genommen. Kann man dann ein Paket der Güteklasse II bestellen, wenn man die Wahrscheinlichkeit für mehr als 12 rote Platten unter 1% halten will? (4 BE)

3. In einer Siedlung sollen 10 Wege mit je 100 Platten gepflastert werden. Der Plattenleger bestellt 10 Pakete der Güteklasse III. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können die 1000 Platten so verlegt werden, daß alle 10 Wege mit jeweils weniger als 13 roten Platten belegt sind? Verwenden Sie die Normalverteilung! (7 BE)

4. Eine Firma liefert Pakete der Güteklasse II und III, die auf Güterwaggons verladen werden. Jeder Waggon enthält lauter Pakete gleicher Güteklasse. Bei einer Lieferung, die doppelt so viele Waggons der Güteklasse III wie der Güteklasse II enthält, ist die Kennzeichnung der Güteklasse vom Regen abgewaschen worden. Durch eine Stichprobe von 50 Platten soll entschieden werden, in welche Güteklasse der jeweilige Waggon eingestuft wird.
   Ein falsch eingestufter Waggon der Güteklasse II verursacht einen Schaden von 1000 DM (entgangene Einnahmen), ein falsch eingestufter Waggon der Güteklasse III verursacht einen Schaden von 2000 DM (Reklamation, verärgerte Kunden).
   Verwenden Sie im folgenden die Tabelle für die Binomialverteilung.

a) Ein Waggon werde genau dann in die Güteklasse II eingestuft, wenn weniger als 3 rote Platten in der Stichprobe sind, andernfalls in Güteklasse III. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art, und berechnen Sie dann den mittleren Schaden pro Waggon, der bei diesem Vorgehen zu erwarten ist. (9 BE)

b) Ermitteln Sie für die Hypothese "Der Waggon enthält Güteklasse II" einen Annahmebereich der Form $\{0,\ldots,k\}$, der so beschaffen ist, daß der mittlere Schaden pro Waggon möglichst klein ist. Wie groß ist dann dieser Schaden? (9 BE)

Lösung

1.a) Das zugehörige **Urnenmodell** lautet:
Den 100 Plattenplätzen entsprechen Kugeln, die in eindeutiger Weise mit Zahlen zwischen 1 und 100 bedruckt sind. Diese 100 Kugeln befinden sich in einer Urne, aus der 2 Kugeln gleichzeitig gezogen werden. Die beiden gezogenen Kugeln ergeben die Plätze, auf denen die beiden roten Platten zu liegen kommen.

Für die Anzahl A der verschiedenen Plattenreihenfolgen erhält man daher:

$$A = \binom{100}{2} = \frac{100!}{2!\cdot 98!} = \frac{99\cdot 100}{2} = \underline{4950} \;;$$

b) Setzt man wie in Aufgabe 1.a) die *Ununterscheidbarkeit* der roten Platten voraus, so folgt nach 1.a):

$$A = \binom{100}{3} = \frac{100!}{3!\cdot 97!} = \frac{98\cdot 99\cdot 100}{3!} = 161700 \;;$$

Für *jede* solche Anordnung erhält man bei vorausgesetzter *Unterscheidbarkeit* der roten Platten jeweils weitere 3! Anordnungen.
Somit ergibt sich die Anzahl A' der verschiedenen Plattenreihenfolgen:

$$A' = \binom{100}{3}\cdot 3! = \frac{100!}{97!} = 100\cdot 99\cdot 98 = \underline{970200}.$$

2.a) Güteklasse I: p("rote Platte") = 0,01

=> p("nichtrote Platte") = 0,99 ; Somit erhält man mit n = 100 Platten:

p("keine Platte ist rot") = $0{,}99^{100} = 0{,}3660 = \underline{36{,}6\%}$

b) Güteklasse II: p("rote Platte") = 0,05

Es handelt sich hier um eine Bernoullikette der Länge n = 100 mit dem Parameter p = 0,05 (Treffer: rote Platte). Mit der Trefferanzahl X ist die Wahrscheinlichkeit $p(x > 12)$ zu berechnen:

$$p(x > 12) = \sum_{i=13}^{100} B(100;0{,}05;i) = 1 - \sum_{i=0}^{12} B(100;0{,}05;i) = 1 - 0{,}99854 =$$
$$= \underline{0{,}00146\ (< 0{,}01)}$$

Man kann also das Paket der Güteklasse II bestellen.

3. Güteklasse III: $p = 0{,}1$

Es werden höchstens 12 rote Platte pro Weg akzeptiert. Unter den 1000 Platten dürfen demnach höchstens $12 \cdot 10 = 120$ rote Platten sein. Ist dies der Fall, so können die Wege wie gefordert verlegt werden. Dabei ist in Kauf zu nehmen, daß man beim Verlegen der Wege rote und weiße Platten verschiedener Wege gegeneinander austauschen muß, um so die Höchstzahl 12 (der roten Platten pro Weg) nicht zu überschreiten. Es handelt sich um eine Bernoullikette der Länge $n = 1000$ mit dem Parameter $p = 0{,}1$ (Treffer: rote Platte). Mit der Trefferanzahl X gilt es die Wahrscheinlichkeit $p(x \le 120)$ zu untersuchen:

$$p(x \le 120) = \sum_{i=0}^{120} B(1000;0{,}1;i) \ ; \quad (*)$$

Da dieser Wert nicht tabelliert ist, soll die *Normalverteilung* verwendet werden.

Der Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ ergeben sich zu:

$\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}1 = 100$;
$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot 0{,}9 = 90$;

Mit der Gaußschen ϕ-Funktion ergibt sich aus (*) die folgende Näherung:

$$p(x \le 120) = \phi\left(\frac{n-\mu+0{,}5}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{120-100+0{,}5}{\sqrt{90}}\right) = \phi\left(\frac{20{,}5}{\sqrt{90}}\right) =$$

$$= \phi(2{,}16) \approx 0{,}985 = 98{,}5\%.$$

Die Platten können also mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,5% wie gefordert verlegt werden.

Anmerkung: Will man das nachträgliche Vertauschen von Platten vermeiden, so ist zu fordern, daß sich in *jedem* Paket höchstens 12 rote Platten befinden. (Die 10 Wege werden hierbei voneinander *unabhängig* behandelt!) Die Wahrscheinlichkeit p, daß sich in einem Paket höchstens 12 rote Platten befinden (Güteklasse III vorausgesetzt), berechnet sich analog zu Aufgabe 2.b):

$$p(x \le 12) = \sum_{i=0}^{12} B(100;0{,}1;i) = 0{,}80182.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich in *jedem* der 10 Pakete höchstens 12 rote Platten befinden, errechnet sich daher zu: $p = 0{,}80182^{10} \approx 0{,}11 = 11\%$.

Die in dieser Anmerkung formulierte Bedingung der Unabhängigkeit ist wesentlich schärfer als die in Aufgabe 3. Dies drückt sich sehr deutlich in der Differenz der zugehörigen Wahrscheinlichkeitswerte aus!

4. Es sollen folgende Hypothesen H_1 (Güteklasse II) und H_2 (Güteklasse III) getestet werden: H_1: $p_1 = 0{,}05$ $\quad$ H_2: $p_2 = 0{,}1$
$A_1 = \{0,1,2\}$ $\quad$ $A_2 = \{3, \ldots ,50\}$.
Dabei sind A_1 und A_2 die Annahmebereiche zu den Hypothesen H_1 und H_2.

a) • **Fehler 1. Art**
Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Hypothese H_1 abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist. Das Ereignis A_2 tritt also mit p_1 ein. Die Wahrscheinlichkeit α berechnet somit zu:

$$\alpha = p_{0,05}(A_2) \quad \Rightarrow \quad \alpha = p_{0,05}(x \ge 3) = \sum_{i=3}^{50} B(50;0{,}05;i) =$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{2} B(50;0{,}05;i) = 1 - 0{,}54053 = \underline{0{,}45947} \ ;$$

- **Fehler 2. Art**

Ein Fehler 2. Art liegt vor, wenn die Hypothese H_1 angenommen wird, obwohl sie falsch ist. Es tritt also A_1 mit p_2 ein. Die Wahrscheinlichkeit β berechnet sich somit zu:

$$\beta = p_{0,1}(A_1) \quad \Rightarrow \quad \beta = p_{0,1}(x \le 2) = \sum_{i=0}^{2} B(50;0{,}1;i) = \underline{0{,}11173} \;;$$

- **Mittlerer Schaden pro Waggon**

Es ist Y die Zufallsgröße "Schaden pro Waggon".
Y kann dann die Werte y_1 = 1000 DM (Waggon der Güteklasse II) und y_2 = 2000 DM (Waggon der Güteklasse III) annehmen.
Der Schadenswert y_1 tritt auf, wenn der Waggon der Güteklasse II als Waggon der Güteklasse III eingestuft wird. Die Wahrscheinlichkeit für dieses falsche Einstufen beträgt α.
Der Schadenswert y_2 tritt auf, wenn der Waggon der Güteklasse III als Waggon der Güteklasse II eingestuft wird. Die Wahrscheinlichkeit für dieses falsche Einstufen beträgt β.
Um die Wahrscheinlichkeitverteilung der Zufallsgröße Y anzugeben, muß die Häufigkeitsverteilung der Waggons der Güteklassen II und III berücksichtigt werden. Die jeweiligen Anzahlen stehen im Verhältnis 1:2:

```
                      0
   1/3      *                 *      2/3
         *                       *
       II                        III
        *                         *
   α    *                         *   β
        *                         *
```

Waggon II falsch eingestuft $\qquad$ Waggon III falsch eingetstuft

$$p_1 = \alpha\cdot\frac{1}{3} \qquad\qquad p_2 = \beta\cdot\frac{2}{3}$$

Somit errechnet sich der Erwartungswert E(Y) von Y (= mittlerer Schaden pro Waggon) zu:

$$E(Y) = p_1\cdot 1000\text{DM} + p_2\cdot 2000\text{DM} = \alpha\cdot\frac{1}{3}\cdot 1000\text{DM} + \beta\cdot\frac{2}{3}\cdot 2000\text{DM} = 302{,}13 \text{ DM}$$

Der mittlere Schaden pro Waggon beträgt also zirka 302 DM.

b) Für die Annahmebereiche A_1 und A_2 setzt man an:

$A_1 = \{0, \ldots, k\}$, $A_2 = \{k+1, \ldots, 50\}$.

Für jede Wahl von k sind die Fehler 1. Art (α) und 2. Art (β) festgelegt:

$$\alpha = p_{0,05}(x \ge k+1) = \sum_{i=k+1}^{50} B(50;0{,}05;i) \qquad (*)$$

$$\beta = p_{0,1}(x \le 2) = \sum_{i=0}^{k} B(50;0{,}1;i) \qquad (**)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, den Parameter k so zu wählen, daß der Erwartungswert

$$E(Y) = p_1\cdot 1000\text{DM} + p_2\cdot 2000\text{DM} = \alpha\cdot\frac{1}{3}\cdot 1000\text{DM} + \beta\cdot\frac{2}{3}\cdot 2000\text{DM}$$

möglichst klein wird.

Berechnet man α, β nach (*),(**) mit verschiedenen k-Werten, so erhält man für E(Y):

k	α	β	E(Y) in DM
0	0,92306	0,00515	315
1	0,72057	0,03379	285
2	0,45947	0,11173	302

Wie man aus den berechneten Werten erkennt, steigt E(Y) für $k > 1$ wieder an. Theoretisch läßt sich dieses Ansteigen aus der Tatsache ableiten, daß für größere Werte von k β größer und α kleiner wird, und sich somit E(Y) vergrößert. Mit dem Minimum für $k = 1$ folgt für den *idealen* Annahmebereich

A_1: $A_1 = \{0,1\}$.

Der dazugehörige *minimale* Schaden beträgt 285 DM.

Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1987
Aufgabe V: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-k|k|k)$, $B(2k|-k|0)$ und $C(2k|0|-k)$ gegeben. Dabei sei $k \in \mathbb{N}$.

1. a) Zeigen Sie, daß die Punkte A, B, C für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Ebene E_k bestimmen, und stellen Sie eine Gleichung von E_k in Normalenform auf.

   [Ein mögliches Ergebnis: E_k: $x_1+x_2+x_3-k = 0$]

   Begründen Sie, daß es sich um eine Schar von parallelen Ebenen handelt.
   (6 BE)

   b) Ermitteln Sie die Schnittpunkte S_k, T_k, U_k dieser Ebene E_k mit den Koordinatenachsen. Legen Sie eine Zeichnung des Koordinatensystems an (Hochformat, Ursprung in der Blattmitte), und tragen Sie das Dreieck $S_4T_4U_4$ ein.
   Berechnen Sie das Volumen V_4 der Pyramide $S_4T_4U_4O$ mit $O(0|0|0)$. (5 BE)

2. Eine weitere Ebene F enthält die Punkte O, $P(3|0|6)$ und $Q(0|3|6)$.

$$A(-k|k|k),\ B(2k|-k|0),\ C(2k|0|-k),\ k \in \mathbb{N}$$

1.a) • **1. Möglichkeit**

Drei Punkte A, B, C bestimmen genau dann eine Ebene, wenn sie *nicht* auf *einer* Geraden liegen, d.h. wenn (zum Beispiel) $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ nicht kollinear sind:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3k \\ -2k \\ -k \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3k \\ -k \\ -2k \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

sind in der Tat für alle $k \neq 0$ nicht parallel. A, B, C bestimmen also eine Ebene E_k.

$\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ sind Richtungsvektoren der Ebene E_k. Einen *Normalenvektor von E_k gewinnt man mit Hilfe des Vektorprodukts*:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man eine Normalenform $\vec{n}\cdot\vec{x} - c = 0$

der Ebene E_k: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - c = 0$;

$$\Rightarrow \qquad x_1 + x_2 + x_3 - c = 0. \qquad (*)$$

Zur Bestimmung von c setzt man einen Punkt (etwa B) in die Gleichung (*) ein: $2k - k + 0 - c = 0$; $c = k$.

Ergebnis: Eine Normalenform der Ebenengleichung E_k lautet:

$x_1 + x_2 + x_3 - k = 0.$

Da alle Ebenen E_k den gleichen Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben, sind sie auch parallel.

• **2. Möglichkeit**

Zur Bestimmung der Ebenengleichung (Normalenform)

$$p\cdot x_1 + q\cdot x_2 + r\cdot x_3 - c = 0$$

und gleichzeitig zum Nachweis, daß die drei Punkte A, B, C eine Ebene festlegen, stellt man folgendes Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned} -kp + kq + kr - c &= 0\ ; \\ 2kp - kq \qquad\ - c &= 0\ ; \\ 2kp \qquad -kr - c &= 0\ . \end{aligned}$$

Man bestimmt p,q und r in Abhängigkeit von k und c. Zuerst zeigt man aber, daß das Gleichungssystem für $k \in \mathbb{N}$ genau eine Lösung hat. Dazu berechnet man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} -k & k & k \\ 2k & -k & 0 \\ 2k & 0 & -k \end{vmatrix} = k^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= k^3 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = k^3 \cdot (2+1) = 3k^3 \neq 0 \text{ für } k \neq 0.$$

Die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems zeigt auch, daß A, B und C genau eine Ebene festlegen. Jetzt berechnet man nach der Cramerschen Regel p, q und r:

$$p = \frac{\begin{vmatrix} c & k & k \\ c & -k & 0 \\ c & 0 & -k \end{vmatrix}}{3k^3} = \frac{c \cdot k^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3k^3} = \frac{c}{3k} \cdot (1+2) = \frac{c}{k} ;$$

$$q = \frac{\begin{vmatrix} -k & c & k \\ 2k & c & 0 \\ 2k & c & -k \end{vmatrix}}{3k^3} = \frac{c}{k} ; \quad r = \frac{\begin{vmatrix} -k & k & c \\ 2k & -k & c \\ 2k & 0 & c \end{vmatrix}}{3k^3} = \frac{c}{k} .$$

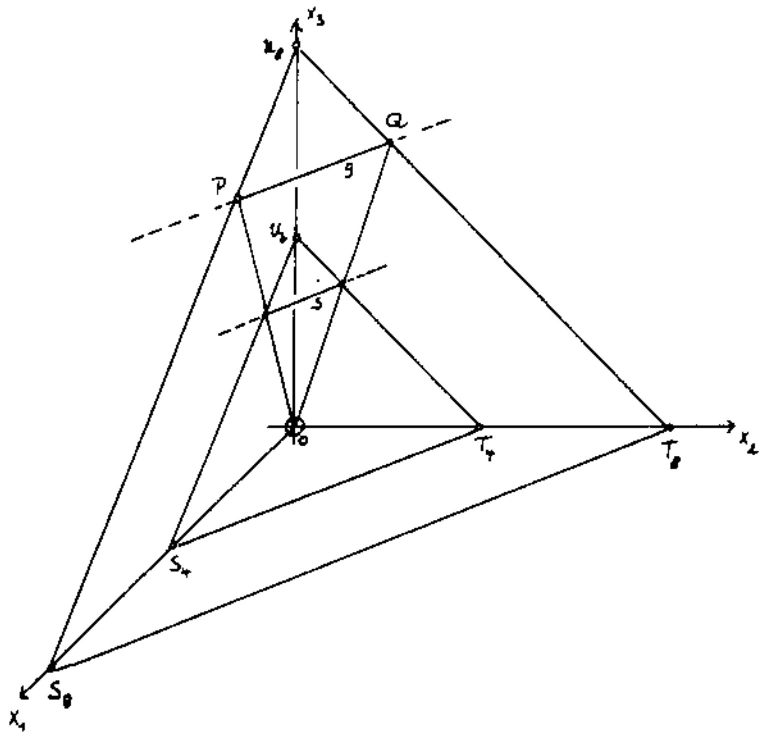
Ebenengleichung:

$$\frac{c}{k} \cdot x_1 + \frac{c}{k} \cdot x_2 + \frac{c}{k} \cdot x_3 - c = 0 \; ; \Rightarrow \underline{x_1 + x_2 + x_3 - k = 0.}$$

1.b) Schnittpunkt mit der x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = k \Rightarrow \underline{S_k(k|0|0)}$

Schnittpunkt mit der x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = k \Rightarrow \underline{T_k(0|k|0)}$

Schnittpunkt mit der x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = k \Rightarrow \underline{U_k(0|0|k)}$



$$V_4 = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta OS_4T_4} \cdot \overline{OU_4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot 4 = \underline{\frac{32}{3}}$$

2.a) Da $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ für $P(2|0|6)$ und $Q(0|2|6)$, sieht man unmittelbar, daß P, Q (also die Gerade PQ) in der Scharebene

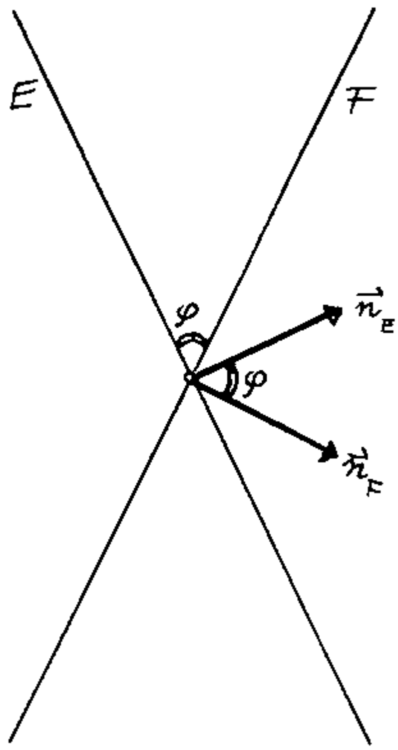
E_8: $x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0$ liegen ($k_0 = 8$).

b) Die Pyramide $S_8T_8U_8O$ geht aus der Pyramide $S_4T_4U_4O$ durch zentrische Streckung mit dem Faktor $\lambda = 2$ und dem Zentrum O hervor. Daher gilt:

$V_8 = \lambda^3 \cdot V_4 = 2^3 \cdot V_4 = \underline{\frac{256}{3}}.$

c) Die Ebene E_4 und E_8 sind parallel. Schneidet eine dritte Ebene (F) zwei parallele Ebenen (E_4, E_8), so sind die Schnittgeraden (s,g) ebenfalls zueinander parallel.

3.a) Den spitzen Winkel zweier Ebenen erhält man als spitzen Winkel der *Normalen* dieser Ebenen:



$$\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n}_{Ek} \cdot \vec{n}_F}{|\vec{n}_{Ek}| \cdot |\vec{n}_F|} \right|;$$

(Der Absolutbetrag auf der rechten Gleichungsseite steht, um den *spitzen* Winkel zu erhalten.)

$$\cos\varphi = \left| \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} \right)}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}\right|} \right|$$

($\vec{n}_F$ steht als ein Normalenvektor der Ebene F senkrecht auf den beiden

Richtungsvektoren $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}$.)

$$\cos\varphi = \left| \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-12\\-12\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-12\\-12\\4\end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{3+3-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}} \right| = \frac{5}{\sqrt{57}} \approx 0{,}66 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \underline{49^\circ}$$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$

1. Weg zur Bestimmung von $\vec{v} \in F$, $\vec{v} \perp \vec{u}$:

Man bringt eine Ebene H mit Normalenvektor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ zum Schnitt mit der Ebene F:

$$H: -2x_1 + 2x_2 = 0 \ ;$$

$$F: \quad \vec{x} = s'\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} + t'\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

(Beachte: F wird aufgespannt von den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$!)

Man setzt nun die Parametrisierung von F in die Normalengleichung $-x_1 + x_2 = 0$ von H ein und erhält:

$$-s + t = 0, \text{ also } s = t.$$

Die Punkte mit den Ortsvektoren

$$\vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}$$

liegen somit auf der Schnittgeraden von F und H:

$$g(F\cap H): \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}.$$

Somit sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}$$

zwei zueinander senkrechte Richtungsvektoren der Ebene F:

$$F: \vec{x} = \sigma\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}.$$

2. Weg zur Bestimmung von $\vec{v} \in F$, $\vec{v} \perp \vec{u}$:

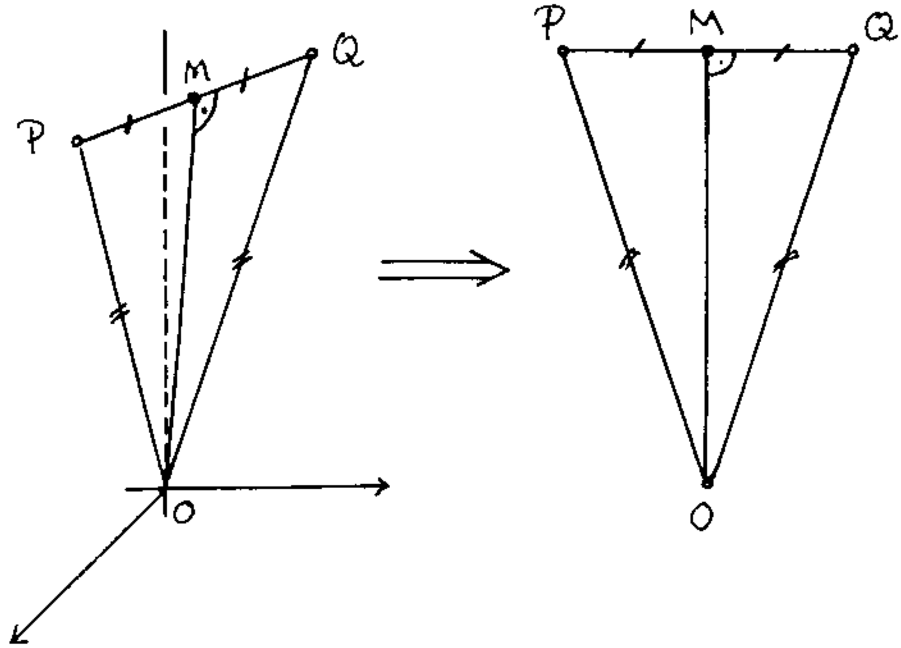
Die Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ sind gleich lang ($|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$).

Das Dreieck OPQ ist also gleichschenklig mit der Basis [PQ]. Daher ist [OM] Lot auf die Basis [PQ], wenn M der Mittelpunkt von [PQ] ist:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{OM}$ ist also ein zu $\overrightarrow{PQ}$ senkrechter Richtungsvektor der Ebene F durch die Punkte O, P und Q:

$$F:\quad \vec{x} = \sigma\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$



Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1987
Aufgabe V: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt A(1|3|-1) und die Geraden

[redacted]

b) In welchem Verhältnis teilt P die Strecke [AB]?
Berechnen Sie damit aus $\overline{AP} = 9$ die Länge der Strecke [AB]. (4 BE)

3. a) Berechnen Sie nun die Koordinaten eines Punktes C, der auf g liegt und mit A und B ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dessen Basis [AB] ist.(6 BE)

b) Zeigen Sie, daß die Lotgerade zur Ebene E durch M die Gerade h schneidet, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S an. (4 BE)

c) Legen Sie, ausgehend von der Pyramide ABCS eine Skizze an, welche die Lagebeziehungen der bisher eingeführten geometrischen Elemente deutlich macht. (4 BE)

d) Begründen Sie ohne Rechnung, daß die durch p und h bestimmte Ebene F auf E senkrecht steht. (3 BE)

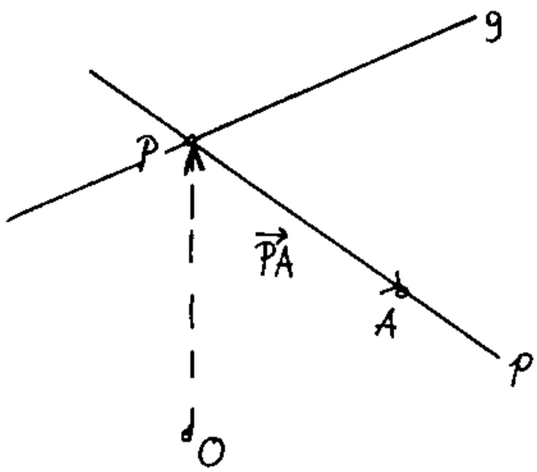
Lösung

1. Möglichkeit:

$$A(1|3|1),\ g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda,\sigma \in \mathbb{R}$$

P(4|-3|5) ist gemeinsamer Punkt von g und h.

$$1.\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \mu \cdot \overrightarrow{PA},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu' \cdot \begin{pmatrix} 1-4 \\ +3+3 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu' \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$



Ergebnis: $p\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Ebene E wird aufgespannt von Richtungsvektoren der Geraden g und p:

$$E\colon \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{g} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{PA}}$$

Einen *Normalenvektor* $\vec{n}$ von E gewinnt man mit Hilfe des *Vektorprodukts* (der beiden Richtungsvektoren):

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} ;$$

Ein möglicher Normalenvektor ist daher $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ oder der dazu parallele

Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit erhält man eine Normalenform $\vec{n}\cdot\vec{x} - c = 0$

der Ebene E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - c = 0$,

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - c = 0. \qquad (*)$$

Zur Bestimmung von c setzt man einen Punkt der Ebene E in (*) ein (zum Beispiel (1|3|-1)):

$$2\cdot 1 + 2\cdot 3 - 1 - c = 0 ;$$
$$\Rightarrow \quad c = 7.$$

Ergebnis:

Eine Normalenform der Ebene E lautet daher: $2x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 = 0$.

2. Möglichkeit:

Hier soll aus der *Parameterform* einer Ebene eine *Normalenform* gewonnen werden.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v} \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{x} - \vec{a} = \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v}$$

das heißt, $\vec{x}-\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\vec{x}$ Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist. Dies ist aber äquivalent dazu, daß die *Determinante* der drei Vektoren verschwindet:

$$\det(\vec{x}-\vec{a},\vec{u},\vec{v}) = 0$$

oder

$$\det(\vec{x},\vec{u},\vec{v}) = \det(\vec{a},\vec{u},\vec{v}).$$

(In dieser letzten Form kann man sich diesen Ansatz zur Gewinnung der Normalenform leicht merken.)
Wird eine Ebene E durch die zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt und ist "$\vec{a} \in E$", so gilt: "$\vec{x} \in E$" $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{x},\vec{u},\vec{v}) = \det(\vec{a},\vec{u},\vec{v})$.

In dem vorliegenden Beispiel schreibt sich die rechte *Determinantengleichung* somit:

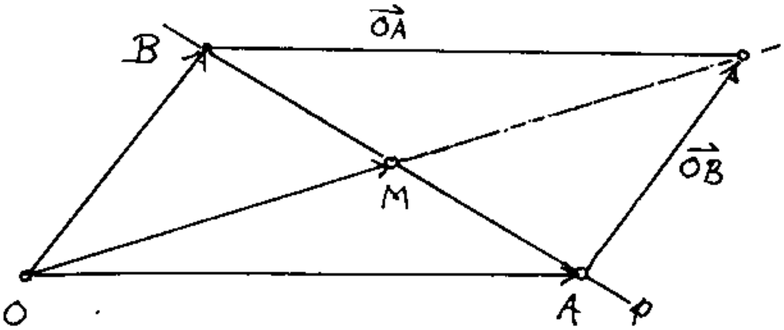
$$\begin{vmatrix} x_1 & -5 & 1 \\ x_2 & 4 & -2 \\ x_3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Durch Auflösen der Determinante erhält man:

$$x_1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 42;$$

$\Rightarrow \quad 12x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 42; \quad \underline{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 = 0.}$

2.a) $M(m_1|1|m_3)$ liegt auf der Geraden p und halbiert die Strecke [AB], mit $B = B(b_1|b_2|b_3)$ (vgl. Figur).



- $B \in p$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B(4+\mu|-3-2\mu|5+2\mu)$

- $\vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) \Rightarrow$

  $M\left(\frac{a_1+b_1}{2} \;\middle|\; \frac{a_2+b_2}{2} \;\middle|\; \frac{a_3+b_3}{2} \right)$; mit oben folgt somit:

  $M\left(\frac{1+4+\mu}{2} \;\middle|\; \frac{3-3-2\mu}{2} \;\middle|\; \frac{-1+5+2\mu}{2} \right) \Rightarrow M\left(\frac{5+\mu}{2} \;\middle|\; -\mu \;\middle|\; 2+\mu \right)$

- Ein Koordinatenvergleich liefert: $m_2 = 1 = -\mu$, das heißt: $\mu = -1$;

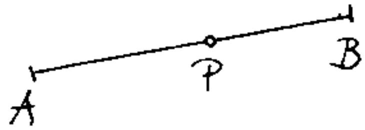
- Somit erhält man zusammenfassend:

  $m_1 = \frac{5+\mu}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$; $m_3 = 1$.

  Die Koordinaten des Mittelpunktes lauten also $M(2|1|1)$.

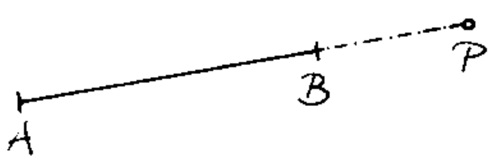
  Die Koordinaten von B ergeben sich mit $\mu = -1$ zu:
  $B(4+\mu|-3-2\mu|5+2\mu) \Rightarrow \underline{B(3|-1|3)}$

2.b)



$\vec{AP} = \lambda \cdot \vec{PB}$
$\lambda > 0$

Innere Teilung



$\vec{AP} = \lambda \cdot \vec{PB}$
$\lambda < 0$

Äußere Teilung
$(\lambda \neq 0)$

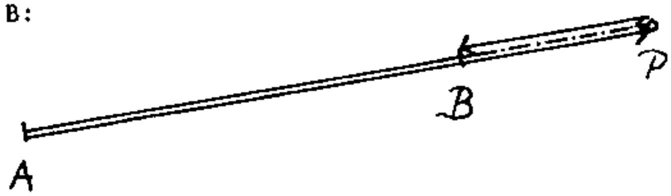
Gesucht ist das Teilverhältnis λ für die Punkte $A(1|3|-3)$, $P(4|-3|5)$ und $B(3|-1|3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \\[2ex] \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = -3 \cdot \overrightarrow{PB} \;;$$

Ergebnis:

Das Teilverhältnis ist -3.

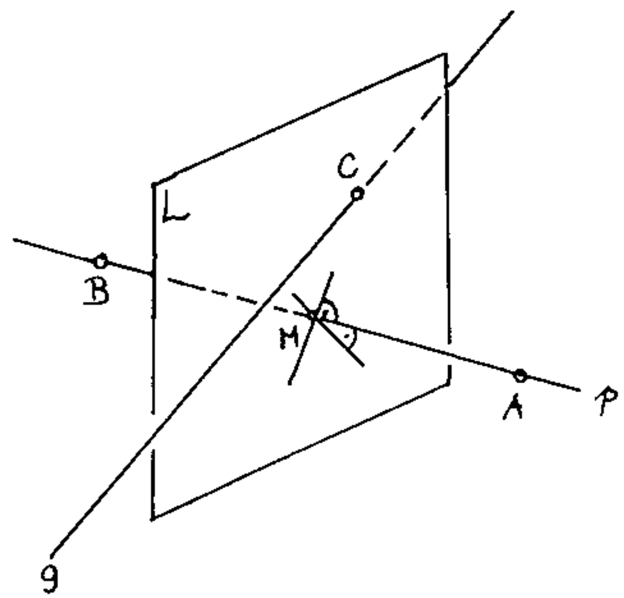
Insbesondere ist $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{PB}$, und P liegt außerhalb von [AB]. P liegt also näher bei B:



Aus $\overline{AP} = 9$ und $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{PB}$ folgt $\overline{PB} = 3$.

Damit ist: $\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{PB} = 6$.

3.a) • **1. Weg**



Die Raumpunkte C, die von A und B gleich weit entfernt sind, liegen auf der zu p = AB senkrechten Ebene L durch den Mittelpunkt der Strecke [AB] ("mittelsenkrechte Ebene" von A, B).

Ein Normalenvektor von L ist ein Richtungsvektor von p, zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Daher gilt: $L\colon x_1 - 2x_2 + 2x_3 - d = 0$;

mit $M \in L$: $2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - d = 0$;

$d = 2$.

Zwischenergebnis "mittelsenkrechte Ebene":

L: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$.

Der gesuchte Punkt C ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene L. Man setzt dazu die *Parameterform* von g

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 - 5\lambda \\ -3 + 4\lambda \\ 5 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

in die Gleichung von L ein:

$(4 - 5\lambda) - 2(-3 + 4\lambda) + 2(5 + 2\lambda) - 2 = 0$; $18 - 9\lambda = 0$; $\lambda = 2$.

Geht man mit diesem λ-Wert in die obige Parametrisierung von g , so erhält man die Koordinaten von C: $\underline{C(-6|5|9)}$

2. Weg:

Man berechnet für einen *parametrisierten* Punkt von g

$$C(4 - 5\lambda|-3 + 4\lambda|5 + 2\lambda)$$

die Entfernungen von A und B in Abhängigkeit von λ:

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-5\lambda)^2 + (-6+4\lambda)^2 + (6+2\lambda)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-5\lambda)^2 + (-2+4\lambda)^2 + (2+2\lambda)^2}$$

Bedingung: $\overline{AC} = \overline{BC}$

=>

$(3-5\lambda)^2 + (-6+4\lambda)^2 + (6+2\lambda)^2 = (1-5\lambda)^2 + (-2+4\lambda)^2 + (2+2\lambda)^2$;

$9-30\lambda+25\lambda^2+36-48\lambda+16\lambda^2+36+24\lambda+4\lambda^2 = 1-10\lambda+25\lambda^2+4-16\lambda+16\lambda^2+4+8\lambda+4\lambda^2$;

$81 - 54\lambda = 9 - 18\lambda$; $72 = 36\lambda$; $\lambda = 2$.

Wie im 1. Weg erhält man $C(-6|5|9)$.

b) Ein Richtungsvektor der Lotgeraden l zur Ebene E durch M ist ein Normalenvektor von E. Dem Ergebnis von Aufgabe 1 entnimmt man die Koordinaten eines solchen Normalenvektors:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich mit $M(2|1|1)$ (vgl. 2.a))

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Überprüfung, ob h und l sich schneiden und gegebenenfalls zur Ermittlung des Schnittpunkts S, setzt man an:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} .$$

Komponentenweise führt dies zu folgendem Gleichungssystem (*):

$$\begin{aligned} 2 + 2t &= 4 + \sigma ; \\ 1 + 2t &= -3 + 4\sigma ; \\ 1 + t &= 5 - \sigma . \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem (*) hat *drei* Gleichungen und (nur) *zwei* Unbekannten σ, t. Für seine Lösung gilt:

[illegible]

(genau ein Schnittpunkt);

Unendlich viele Lösungen <=> h, l sind identisch: h = l
(unendlich viele Schnittpunkte).

Man vereinfacht nun die Gleichungen des Systems (*):

$$\left.\begin{aligned} 2t - \sigma &= 2 \\ 2t - 4\sigma &= -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3\sigma = 6 \Rightarrow \sigma = 2,\ t = 2.$$

d) Die Geraden h, p und l (vgl. 3b)) schneiden sich gegenseitig, liegen also alle drei in *derselben* Ebene:

$$E(p,h) = E(p,l).$$

Da l senkrecht zu E steht, ist

$$E(p,l) \perp E,$$

also

$$F = E(p,h) \perp E,$$

was zu beweisen war.