# Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1988
## Aufgabe I: Infinitesimalrechnung

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$f_a: x \longmapsto x^2 - \ln(x^2 + a^2)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ .

1. a) Untersuchen Sie die Graphen $G_a$ von $f_a$ auf Symmetrie. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen $f_a$ für $x \longrightarrow \pm\infty$ . 5 BE

b) Zeigen Sie, daß für die Ableitung gilt: $f_a'(x) = \dfrac{2x(x^2 + a^2 - 1)}{x^2 + a^2}$ .
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Scharfunktion in Abhängigkeit von a und bestimmen Sie damit Lage und Art der Extrema. Folgern Sie, daß jede Scharfunktion einen minimalen Funktionswert $m_a$ besitzt, und berechnen Sie diesen Wert.

[ Teilergebnis: $m_a = 1 - a^2$ für $a < 1$; $m_a = -2\ln a$ für $a \geq 1$ ] 12 BE

c) Welche Scharkurven $G_a$ haben mit der x-Achse Punkte gemeinsam, und wie viele derartige Punkte gibt es dann? Begründen Sie Ihre Antwort. 6 BE

d) Weisen Sie nach, daß für $a_1 < a_2$ der Graph $G_{a_1}$ stets oberhalb des Graphen $G_{a_2}$ liegt. 3 BE

e) Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte $f_2(1)$, $f_2(2)$, $f_{0,5}(2)$ die Graphen $G_2$ und $G_{0,5}$ im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ in ein Koordinatensystem mit Längeneinheit 2 cm ein. 7 BE

2. a) Bestimmen Sie unter Verwendung partieller Integration eine Stammfunktion $F_a$ von $f_a$. 8 BE

[Mögliches Ergebnis: $F_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - x\ln(x^2 + a^2) - 2a \arctan \frac{x}{a}$]

b) Berechnen Sie den Inhalt A des zwischen den Graphen $G_2$ und $G_{0,5}$ liegenden Flächenstücks. 9 BE

Hinweis: Unter Verwendung der bekannten Abschätzung $\ln z \leq z - 1$ für $z \in \mathbb{R}^+$

können Sie zeigen: $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \ln \dfrac{x^2 + a_2^2}{x^2 + a_1^2} = 0$ .

### Lösung

$f_a(x) = x^2 - \ln(x^2 + a^2)$ , $a \in \mathbb{R}^+$ , $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

1. a) • $f_a(-x) = (-x)^2 - \ln((-x)^2 + a^2) = f_a(x)$, wegen $(-x)^2 = x^2$
Der Graph $G_a$ der Funktion $f_a$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \ln(x^2 + a^2)) = \infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x)$.

(Der Graph der Quadratfunktion $x \longmapsto x^2$ wächst "viel stärker" als der Graph der Logarithmusfunktion. Ausführliche Begründung mit Hilfe des Hinweises in 2b - nicht verlangt! -:
$\lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - 2 \cdot \ln x) \geq \lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - 2x + 2) = \infty$ .)

b) $f_a'(x) = 2x - \dfrac{2x}{x^2 + a^2} = 2x \cdot \dfrac{x^2 + a^2 - 1}{x^2 + a^2}$

$f_a'(x) = 0 \iff x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{1 - a^2}$

**1. Fall:** $1 - a^2 > 0$ , d.h. $a < 1$ $(a > 0!)$
Vorzeichenverhalten von $f_a'(x)$:

| | | $-\sqrt{1-a^2}$ | | $0$ | | $\sqrt{1-a^2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sign(x) | $-\ -\ -$ | | $-\ -$ | 0 | $+\ +$ | | $+\ +$ |
| $\text{sign}(x^2-(1-a^2))$ | $+\ +\ +$ | \| | $-\ -\ -$ | \| | $-\ -$ | \| | $+\ +\ +$ |
| $\text{sign} f_a'(x)$ | $-\ -\ -$ | \| | $+\ +\ +$ | 0 | $-\ -\ -$ | \| | $+\ +\ +$ |

<u>Ergebnis (für a < 1):</u>
Der Graph $G_a$ ist streng monoton steigend in $]-\sqrt{1 - a^2}; 0[$
und $]+\sqrt{1 - a^2}; \infty[$ .

Er ist streng monoton fallend in $]-\infty; -\sqrt{1 - a^2}[$
und $]0; \sqrt{1 - a^2}[$ .

Daher liegen an den Stellen $x_1 = -\sqrt{1 - a^2}$ und $x_2 = +\sqrt{1 - a^2}$ Minima und in $x_3 = 0$ ein Maximum.

Es ist $f_a(\sqrt{1 - a^2}) = 1 - a^2 - \ln(1 - a^2 + a^2) = 1 - a^2$ und
$f_a(0) \qquad = -2 \cdot \ln a$ .

Daher Minima: $(\pm\sqrt{1 - a^2}\ ;\ 1 - a^2)$
Maximum: $(0\ ;\ -2 \cdot \ln a)$ .

**2. Fall:** $1 - a^2 < 0$, d.h. $a > 1$ $(a > 0!)$
In diesem Fall ist $\dfrac{x^2 + a^2 - 1}{x^2 + a^2} > 0$ ,
also $\text{sign}(f_a'(x)) = \text{sign}(x)$.

<u>Ergebnis (für a > 1):</u>
$G_a$ ist streng monoton fallend für $x < 0$
und streng monoton steigend für $x > 0$
In $(0; -2 \cdot \ln a)$ liegt ein Minimum.
Für $a = 1$ ist $f_1'(x) = 2 \cdot \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ , so daß wir die Fälle $a > 1$ und $a = 1$ zusammenfassen können.
Insbesondere besitzt jede Scharkurve einen minimalen Funktionswert $m_a = \begin{cases} 1 - a^2 & \text{für } a < 1 \\ -2 \cdot \ln a & \text{für } a \geq 1 \end{cases}$ .

c) Die Graphen $G_a$ sind stetig in $\mathbb{R}$ und für $x \longrightarrow \pm\infty$ strebt $f_a(x) \longrightarrow +\infty$ .
Aus der in b) bestimmten Zahl und Lage der Minima (bzw. aus dem Monotonieverhalten) folgt daher die Zahl der Nullstellen :

Für $a < 1$ ist $m_a = 1 - a^2 > 0$ . $f_a$ hat daher keine Nullstellen.

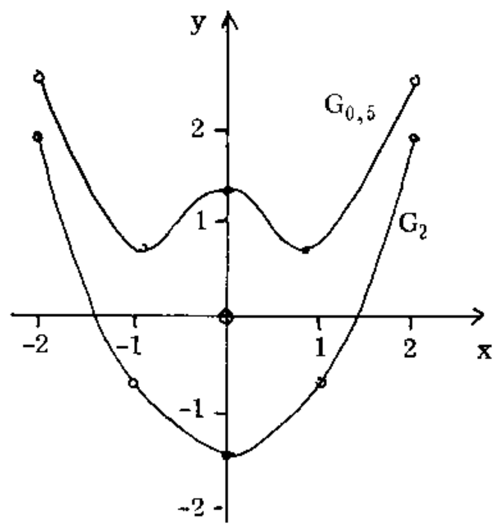
Für $a = 1$ ist das einzige Minimum der Ursprung $(0;0)$. Es gibt genau eine Nullstelle.

Für $a > 1$ ist der Wert des einzigen Minimums negativ: $-2\cdot\ln a < 0$.
$f_a$ hat daher zwei Nullstellen.

d) $0 < a_1 < a_2 \Rightarrow a_1^2 < a_2^2 \Rightarrow x^2 + a_1^2 < x^2 + a_2^2 \Rightarrow$
$\ln(x^2 + a_1^2) < \ln(x^2 + a_2^2) \Rightarrow x^2 - \ln(x^2 + a_1^2) > x^2 - \ln(x^2 + a_2^2)$.
Das bedeutet, $G_{a_1}$ liegt oberhalb von $G_{a_2}$.

e) $f_2(x) = x^2 - \ln(x^2 + 4)$, $\quad f_{0,5}(x) = x^2 - \ln(x^2 + \frac{1}{4})$.

Funktionswerte: $f_2(1) = 1 - \ln 5 \approx -0,61$
$f_2(2) = 4 - \ln 8 \approx 1,92$
Minimum von $G_2$: $(0; -\ln 4) \approx (0; -1,39)$
$f_{0,5}(2) = 4 - \ln 4,25 \approx 2,55$
Minima $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}; 0,75)$, $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,87$.
Maximum $(0; \ln 4) \approx (0; 1,39)$.




2. a)
$$\int (x^2 - \ln(x^2 + a^2))\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\ln(x^2 + a^2)}\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - (\underset{u}{x} \cdot \underset{v}{\ln(x^2 + a^2)} - \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\frac{2x}{x^2 + a^2}}\,dx)$$
$$= \frac{x^3}{3} - x\cdot\ln(x^2 + a^2) + 2\cdot\int \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2}\right)dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - x\cdot\ln(x^2 + a^2) + 2x - 2\cdot a \int \frac{1/a}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - x\cdot\ln(x^2 + a^2) + 2x - 2a\cdot\arctan\frac{x}{a};$$
$$F_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - x\cdot\ln(x^2 + a^2) - 2a\cdot\arctan\frac{x}{a}.$$

b) Wegen $f_{1/2}(x) > f_2(x)$ für alle x, ist

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}(f_{1/2}(x) - f_2(x))\,dx = \lim_{r\to\infty}\,[F_{1/2}(x) - F_2(x)]_{-r}^{r}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\,[x\cdot(\ln(x^2+4) - \ln(x + {}^1/_2)) + 4\cdot\text{arc tan}\,{}^1/_2 x - \text{arc tan}\,2x]_{-r}^{r}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\,[x\cdot\ln\frac{x^2+4}{x^2+{}^1/_4} + 4\cdot\text{arc tan}\,{}^1/_2\,x - \text{arc tan}\,2x]_{-r}^{r}\quad .$$

Wegen $\ln\frac{x^2+4}{x^2+{}^1/_4} \le \frac{x^2+4}{x^2+{}^1/_4} - 1 = \frac{3{,}75}{x^2+{}^1/_4}$ ergibt sich

$$0 \le \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x^2+4}{x^2+{}^1/_4} \le \lim_{x\to\infty}\frac{3{,}75\cdot x}{x^2+{}^1/_4} = 0\ .$$

Also ist $\lim_{r\to\infty}\,[x\cdot\ln\frac{x^2+4}{x^2+{}^1/_4}]_{-r}^{r} = 0$ und somit

$$A = \lim_{r\to\infty}\,(8\cdot\text{arc tan}\,\frac{1}{2}r - 2\cdot\text{arc tan}\,2r) = 8\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{2} = 3\cdot\pi.$$

Der Inhalt der von $G_{1/2}$ und $G_2$ eingeschlossenen (unendlichen) Fläche ist $3\pi$.

**Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1988**
**Aufgabe II: Infinitesimalrechnung**

Gegeben ist die Funktion $f\colon x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-2}{4-x}}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f$ .

1. a) Weisen Sie nach, daß $D_f = [2;4[$ ist, und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von $D_f$ . 5 BE

   b) Zeigen Sie, daß gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{(4-x)\sqrt{(4-x)(x-2)}}$ .

   Geben Sie $D_{f'}$ an, und untersuchen Sie das Verhalten von f' an den Rändern $D_{f'}$. 5 BE

   c) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die Wertemenge von f. 3 BE

2. a) Zeigen Sie, daß die Umkehrfunktion $f^{-1}$ existiert und durch den Term

   $f^{-1}(x) = \dfrac{4x^2 + 2}{1 + x^2}$ beschrieben wird.

   Geben Sie die Definitions- und Wertemenge von $f^{-1}$ an. 5 BE

   b) Berechnen Sie f(3), und skizzieren Sie die Graphen $G_f$ und $G_{f^{-1}}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm). 7 BE

   c) Es existiert genau eine Stelle $a \in D_f$, an der sich $G_f$ und $G_{f^{-1}}$ schneiden (Nachweis und Berechnung von a nicht erforderlich).

   Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt des Flächenstücks, das von $G_f$, $G_{f^{-1}}$ und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird. 8 BE

3. Nun wird die Funktion $g\colon x \longmapsto \arctan f(x)$ mit maximaler Definitionsmenge $D_g$ betrachtet.

   a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von Teilaufgabe 1 die Definitionsmengen $D_g$, $D_{g'}$ und die Wertemenge $W_g$ sowie das Verhalten von g' am linken Rand von $D_{g'}$. 5 BE

   b) Zeigen Sie, daß der Graph $G_g$ von g in $]2;4[$ punktsymmetrisch zu $S(3|\frac{\pi}{4})$ ist. Zum Nachweis darf die Formel $\arctan z + \arctan \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$ $(z>0)$ benützt werden. 6 BE

   c) Skizzieren Sie den Graphen $G_g$ unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in das bereits angelegte Koordinatensystem. Geben Sie ohne Integration den Inhalt des Flächenstücks an, das von $G_g$ , der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung x = 4 begrenzt wird, und erläutern Sie Ihre Überlegung. 6 BE

**Lösung**

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{4-x}}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f$ .

1\. a) • **Bestimmung von $D_f$ :** $\dfrac{x-2}{4-x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow$

$x \geq 2$ und $4 - x > 0$ , d.h. $x \in [2;4[$
oder
$x \leq 2$ und $4 - x < 0$ , d.h. $x \in \{\ \}$ , also

$D_f = [2;4[$

```
                 2                      4
    - - -  [ + + + + + + |  + + + +  ------>
    + + +  | + + + + + + [  - - - -  ------>
    - - -  [ + + + + + + [  - - - -  ------>
                 2                      4
```

• **Randverhalten:**

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} f(x) = \infty$

b) Mit $\sqrt{u}\,' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ und der Ketten- und Quotientenregel ergibt sich

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{4-x}}} \cdot \frac{4-x+x-2}{(4-x)^2} = \sqrt{\frac{4-x}{x-2}} \cdot \frac{1}{(4-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{4-x} \cdot \sqrt{\frac{1}{(4-x)(x-2)}}$$

$D_{f'} = D_f \setminus \{2\} = ]2;4[$ . $\qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} f'(x) = \infty$

c) Da $f'(x) > 0$ für alle $x \in ]2;4[$ ist der Graph $G_f$ streng monoton steigend.
Wegen $f(2) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \infty$ folgt $W_f = \mathbb{R}_0^+$ .

2\. a) Aus der strengen Monotonie von f folgt die Umkehrbarkeit von f mit
$D_{f^{-1}} = W_f = [0;\infty[$ und $W_{f^{-1}} = D_f = [2;4[$ .

Zur Berechnung der Umkehrfunktion vertauscht man in $y = f(x)$ x und y und löst nach y auf:

$x = f(y), \qquad y = f^{-1}(x)$ .

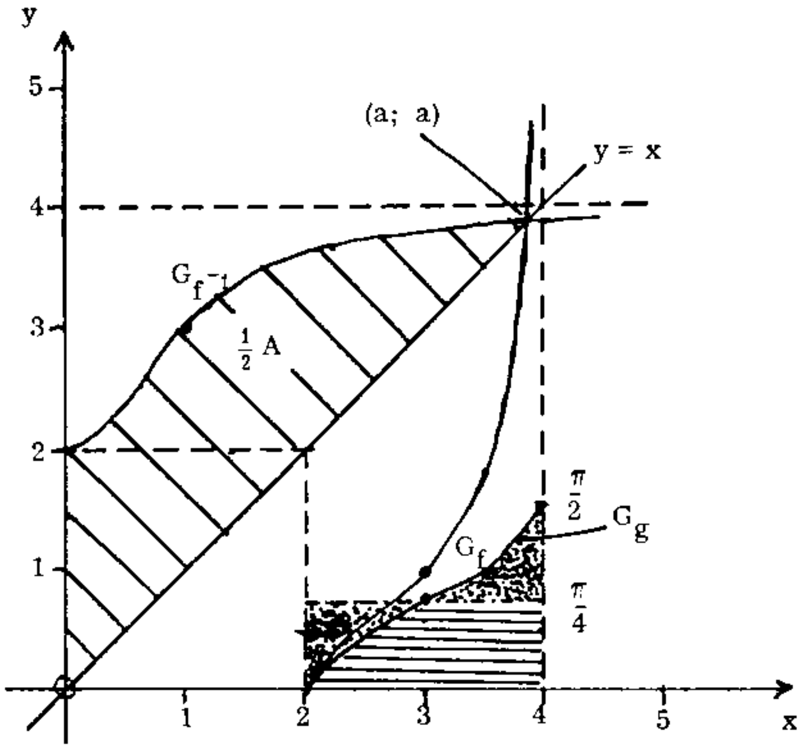
Hier: $\quad y = \sqrt{\dfrac{x-2}{4-x}}, \qquad x = \sqrt{\dfrac{y-2}{4-y}}$

$\Longleftrightarrow \quad x^2(4 - y) = y - 2$
$\Longleftrightarrow \quad y(1 + x^2) = 4x^2 + a$
$\Longleftrightarrow \quad y = \dfrac{4x^2 + 2}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}_0^+)$

Gleichung der Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(x) = \frac{4x^2 + 2}{1 + x^2}$$

b) $f(3) = 1$ (also $f^{-1}(1) = 3$). Der Graph von $f^{-1}$ ergibt sich aus dem Graphen von $f$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ des I. (und III.) Quadranten. (d.h. $(x;y) \longmapsto (y;x)$).




c) $A = 2\cdot\int_0^a (f^{-1}(x) - x)\,dx$ (s. Figur) $= 2\cdot\int_0^a \left(\frac{4x^2 + 2}{1 + x^2} - x\right) dx =$

$$= 4\cdot\int_0^a \frac{2x^2 + 2 - 1}{x^2 + 1}\,dx - a^2 = 4\cdot\int_0^a \left(2 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx - a^2$$

$\underline{A = 8a - 4\cdot \arctan a - a^2}$

3\. a) $g(x) = \arctan \sqrt{\frac{x - 2}{4 - x}}$ . Wegen $\mathbb{D}_{\arctan(x)} = \mathbb{R} = D_{1/_{1+x^2}}$, ist $\mathbb{D}_g = \mathbb{D}_f$ , $\mathbb{D}_{g'} = \mathbb{D}_{f'}$.

Wegen $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ und $\arctan 0 = 0$ ergibt sich $g(2) = 0$ und

$$\lim_{x\to 4} g(x) = \frac{\pi}{2} .$$

Da der arc tan und f streng monoton steigen, ist auch g streng monoton steigend.

Insgesamt folgt $W_g = [0;\frac{\pi}{2}[$

Ferner ist $g'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x - 2}{4 - x}} \cdot f'(x) = \frac{4 - x}{2} \cdot f'(x)$ .

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} g'(x) = \lim_{x\to 2} f'(x) = \infty$ .

b) Punktsymmetrie von g bezüglich (a;b) bedeutet:
$b - g(a - t) = g(a + t) - b$ für alle t mit $a \pm t \in D_g$ .

In diesem Fall also ist Punktsymmetrie bzgl. $S(3;\frac{\pi}{4})$ gleichbedeutend mit
$g(3 + t) + g(3 - t) = 2 \cdot \frac{\pi}{4}$ .

In der Tat ist für $0 \leq t < 1$ :

$f(3 + t) = \sqrt{\frac{1 + t}{1 - t}} =: z$ $\qquad$ $f(3 - t) = \sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}} = \frac{1}{z}$ .

Also: $g(3 + t) + g(3 - t) = \arctan f(3 + t) + \arctan f(3 - t) =$
$= \arctan z + \arctan \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$ .

g ist also punktsymmetrisch bezüglich $\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$ .

c) Wegen der Punktsymmetrie zu S stimmt der gesuchte Flächeninhalt mit dem Inhalt des Rechtecks $(4 - 2) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ überein. Vgl. obige Figur !

**Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1988**
**Aufgabe III: Wahrscheinlichkeitsrechnung**

Ein Reiseunternehmen chartert ein Flugzeug, das 250 Passagiere aufnehmen kann, für Flüge nach Gransolio.

1. An einem Flug nehmen 243 Personen teil.

   a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die freien Plätze? 3 BE

   b) Das Flugzeug hat 50 Plätze für Raucher und 200 Plätze für Nichtraucher. 47 Fluggäste belegen einen Platz für Raucher, die restlichen einen Platz für Nichtraucher. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt für die freien Plätze? 4 BE

2. Das Reiseunternehmen weiß aus Erfahrung, daß ein gebuchter Platz nur mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 auch tatsächlich belegt wird.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 50 zufällig ausgewählten gebuchten Plätzen mindestens 46 belegt werden? 4 BE

   b) Da gebuchte Plätze mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 nicht belegt werden, ist das Reiseunternehmen dazu übergegangen, die Flüge um 10% überbuchen zu lassen. Das bedeutet, daß für jeden Flug 275 Plätze verkauft werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nicht alle Personen, welche die Reise wirklich antreten wollen, mit dem Flugzeug befördert werden können? Näherung mit der Normalverteilung! 6 BE

3. Das Reiseunternehmen ändert die Vertragsbedingungen und möchte nun in Erfahrung bringen, ob sich die bisherige Wahrscheinlichkeit für Nichtbelegung eines gebuchten Platzes (Rücktrittswahrscheinlichkeit) von 0,1 auf einen neuen Wert p ändert. Dazu werden die nächsten 1500 Buchungen untersucht.

   a) Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ab, um wieviel die relative Häufigkeit der Reiserücktritte höchstens von der Rücktrittswahrscheinlichkeit p abweicht bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens 99% .
   Verwenden Sie $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ . 6 BE

   b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung bei unveränderter Rücktrittswahrscheinlichkeit 0,1 einen möglichst kleinen, zum bisherigen Erwartungswert für die Rücktritte symmetrischen Bereich, in dem die Anzahl der Rücktritte (bei 1500 Buchungen) mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit liegt. Welchen Schluß kann das Reiseunternehmen ziehen, wenn tatsächlich 123 Rücktritte gezählt werden? 10 BE

4. Ein Reiseleiter behauptet, daß mindestens 60% der Flüge nach Gransolio Verspätung haben. Das Reiseunternehmen möchte diese Aussage überprüfen. Daraufhin werden die nächsten 20 Flüge auf ihre Pünktlichkeit hin kontrolliert. Kann der Behauptung des Reiseleiters auf dem Signifikanzniveau 5% widersprochen werden, wenn 8 dieser Flüge Verspätung haben? 7 BE

## Lösung

1. a) **Urnenmodell:** In einer Urne befinden sich 250 ununterscheidbare Kugeln, die von 1 bis 250 durchnumeriert sind. Es werden 7 Kugeln mit einem Griff aus der Urne gezogen.
Die Kugeln entsprechen den verfügbaren Plätzen, die gezogenen Kugeln sind die Nummern der freien Plätze. (Auf die Reihenfolge dieser Nummern kommt es nicht an, sie werden daher gleichzeitig gezogen.)

Damit ergibt sich die Anzahl A der Möglichkeiten für freie Plätze:

$$A = \binom{250}{7} = \frac{250!}{7!\ 243!} = \frac{250\cdot 249\cdot 248\cdot 247\cdot 246\cdot 245\cdot 244}{7!}\,, \qquad \underline{A \approx 1{,}11\cdot 10^{13}}$$

b) <u>Modifiziertes Urnenmodell: In zwei</u> Urnen $U_1$ und $U_2$ befinden sich wie folgt Kugeln:
$U_1$: 50 durchnumerierte, ununterscheidbare schwarze Kugeln.
Diese Kugeln entsprechen den Rauchern!

$U_2$: 200 durchnumerierte, ununterscheidbare weiße Kugeln.
Diese Kugeln entsprechen den Nichtrauchern!

Aus Urne $U_1$ werden 3 Kugeln, aus Urne $U_2$ werden 4 Kugeln gezogen.
Die Anzahl A der Möglichkeiten für freie Plätze ergibt sich aus dem Zählprinzip:

$$A = \underset{\text{"freie Raucherplätze"}}{\binom{50}{3}} \cdot \underset{\text{"freie Nichtraucherplätze"}}{\binom{200}{4}} =$$

$$A = \frac{50!}{3!\ 47!} \cdot \frac{200!}{4!\ 196!} =$$

$$= \frac{50\cdot 49\cdot 48\ \cdot\ 200\cdot 199\cdot 198\cdot 197}{3!\ 4!}\,, \qquad \underline{A \approx 1{,}27\cdot 10^{12}}$$

2. a) Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge n = 50 ("Anzahl gebuchter Plätze") mit dem Parameter p = 0,9 ("Trefferwahrscheinlichkeit") vor.
Die Anzahl Z der Treffer soll größer gleich 46 sein. Somit gilt für die zugehörige Wahrscheinlichkeit P:

$$P(Z \ge 46) = \sum_{i=46}^{50} B(50;\ 0{,}9;\ i) \overset{!}{=} 1 - \sum_{i=0}^{45} B(50;\ 0{,}9;\ i) = 1 - 0{,}56880$$
(vgl. Tabelle)

$\underline{P(Z \ge 46) = 0{,}4312 \approx 43{,}1\%}$

b) Die Werte der zugrundegelegten Bernoulli-Kette lauten hier: n = 275, p = 0,9. Die Trefferanzahl Z soll echt größer als 250 sein. Also gilt:

$$P(Z > 250) = \sum_{i=251}^{275} B(275;\ 0{,}9;\ i) \overset{!}{=} 1 - \sum_{i=0}^{250} B(275;\ 0{,}9;\ i).$$

Da diese Werte nicht tabelliert sind, soll eine Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung vorgenommen werden. Mit dem Mittelwert $\mu = n\cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ gilt (vgl. FS. S.111):

$$\sum_{i=0}^{k} B(n;\ p;\ i) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu+0{,}5}{\sigma}\right).$$

Hier gilt: $\mu = 275\cdot 0{,}9 = 247{,}5$ , $\sigma = \sqrt{275\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1} \approx 4{,}97$ .

**Zusammenfassend:**

$$P(Z > 250) \approx 1 - \Phi\left(\frac{250 - 247{,}5 + 0{,}5}{4{,}97}\right) = 1 - \Phi(0{,}60) = 1 - 0{,}72575$$

(vgl. Tabelle)

$\underline{P(Z > 250) \approx 0{,}27425 \approx 27{,}4\%}$

3\. a) Die Tschebyschow-Ungleichung lautet (vgl. FS S. 107):

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n} \qquad (\varepsilon > 0\ ,\ p(1-p) \leq \tfrac{1}{4})\ .$$

Die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ weicht vom Parameter $p = 0{,}1$ <u>höchstens</u> um $\varepsilon$ ab bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens 99%, wenn gilt:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n} \geq 0{,}99\ .$$

$$1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n} \geq 0{,}99\ , \qquad 0{,}01 \geq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}\ ,$$

$$\varepsilon^2 \geq \frac{1}{4\cdot 0{,}01\cdot n} \quad (n = 1500)\ , \qquad \underline{\varepsilon \overset{(>)}{=} 0{,}129}$$

Die relative Häufigkeit der Reiserücktritte weicht höchstens um 12,9% von der Rücktrittswahrscheinlichkeit ab.

b) Es soll die Normalverteilung zugrundegelegt werden:
Mittelwert $\mu = n\cdot p = 1500\cdot 0{,}1 = 150$

Standardabweichung $\varepsilon = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} = \sqrt{1500\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9} \approx 11{,}6$

Wird die Anzahl der Rücktritte mit X und die Wahrscheinlichkeit für X mit p bezeichnet, so soll gelten:

$$P_{0,1}^{1500}\,(150 - k \leq X \leq 150 + k) \geq 0{,}95\ .$$

Der Parameter $k \in \mathbb{N}$ legt hierbei die Länge des um $\mu = 150$ symmetrisch liegenden Intervalls fest; er soll berechnet werden. Hierzu nutzt man bei der Verteilungsfunktion $\Phi$ die Symmetrie der Dichtefunktion $\varphi$ aus:

$$P_{0,1}^{1500}\,(150 - k \leq X \leq 150 + k) = \Phi(150 - k \leq X \leq 150 + k) =$$
$$= \Phi(X \leq 150 + k) - \Phi(X \leq 150 - k) \overset{!}{=}$$
$$\Phi(X \leq 150 + k) - (1 - \Phi(X \leq 150 + k)) = 2\cdot\Phi(X \leq 150 + k) - 1\ .$$

Also gilt: $2\cdot\Phi\left(\frac{150 + k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) - 1 \geq 0{,}95$

$$\Phi\left(\frac{k + 0{,}5}{11{,}6}\right) \geq 0{,}975\ ,$$

$$\frac{k + 0{,}5}{11{,}6} \geq 1{,}96\ , \quad \text{also} \quad k \geq 22{,}2\ .$$

k ist also aus der Menge {23, 24 ...} . Da der symmetrische Bereich möglichst klein sein soll, folgt k = 23 .
Der symmetrisch um $\mu$ liegende Bereich lautet somit:
{127, 128, ... , 150, ... , 172, 173}.
Bei 123 Rücktritten kann das Unternehmen daher davon ausgehen, daß mit 95% Sicherheitswahrscheinlichkeit die Rücktrittswahrscheinlichkeit p kleiner geworden ist!

4. Hypothese $H_1$: $p \geq 0{,}6$ Hypothese $H_2$: $p < 0{,}6$

Annahmebereich $A_1$ von $H_1$: $A_1 = \{c + 1, \ldots , 20\}$
Annahmebereich $A_2$ von $H_2$: $A_2 = \{0, \ldots , c\}$ $(c \in N)$

Das Signifikanzniveau ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art, d.h. die Hypothese $H_1$ wird abgelehnt (also Annahmebereich $A_2$ trifft zu), obwohl Hypothese $H_1$ wahr ist (also $p \geq 0{,}6$) .

Es gilt also: $P^{20}_{0,6}(A_2) \leq 5\%$ . Für $P^{20}_{0,6}(A_2)$ wird eine Binomialverteilung zugrundegelegt:

Für $P^{20}_{0,6}(A_2) = \sum_{i=0}^{c} B(20;\, p \geq 0{,}6;\, i) \overset{!}{\leq} \sum_{i=0}^{c} B(20;\, 0{,}6;\, i)$

$$\sum_{i=0}^{c} B(20;\, 0{,}6;\, i) \leq 5\% \quad (=0{,}05)$$

Aus der Tabelle liest man ab: $c = 7$ .
Somit gilt: $A_1 = \{8, \ldots , 20\}$ .
Der Behauptung des Reiseleiters kann also nicht widersprochen werden.

**Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1988**
**Aufgabe IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung**

Zu jedem Ziffernschloß gehört eine "Geheimzahl", mit der das Schloß geöffnet werden kann. Im folgenden werden als Geheimzahlen vierstellige Zahlen verwendet, die aus den Ziffern 1 bis einschließlich 7 gebildet werden können. Dabei wird die Produktion so gesteuert, daß alle möglichen Geheimzahlen gleichwahrscheinlich sind.

1. a) Berechnen Sie den Anteil aller Geheimzahlen, die genau zwei gleiche Ziffern enthalten. Bei welchem Bruchteil dieser Geheimzahlen sind die übereinstimmenden Ziffern benachbart? 5 BE

   b) Sind die Ereignisse Z:= "Die Geheimzahl enthält genau zwei übereinstimmende Ziffern" und U:= "Die Geheimzahl besteht nur aus ungeraden Ziffern" unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort. 5 BE

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Element aus U, wenn man nur aus den Elementen von Z zufällig auswählt? 3 BE

2. Aus einer Tagesproduktion werden 200 Ziffernschlösser zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich unter diesen 200 Schlössern mindestens eines, das sich mit der Geheimzahl 1234 öffnen läßt? Verwenden Sie die Poisson-Näherung. 5 BE

3. Die Zufallsgröße X gibt die Zahl der Einsen an, die in einer Geheimzahl vorkommen.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auf 0,1% genau. 6 BE

   b) Man wählt nun 100 Ziffernschlösser zufällig aus. $X_i$ ist die Anzahl der Einsen in der Geheimzahl des i-ten Schlosses. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$. 3 BE

   c) Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow die Mindestwahrscheinlichkeit dafür ab, daß der Erwartungswert von Y um weniger als 15 verfehlt wird. 6 BE

4. Um einen Hinweis auf die Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Geheimzahlen zu erhalten, werden im Laufe eines Jahres 20 000 Schlösser überprüft. Es wird folgender Test durchgeführt: Man bestimmt die Anzahl T der Geheimzahlen, die die Ziffer 1 genau einmal enthalten. Liegt T im Intervall [7100;7300], dann hält man an der Nullhypothese $H_0$ := "Der Anteil der Geheimzahlen, die die Ziffer 1 genau einmal enthalten, beträgt 36%" fest; andernfalls lehnt man sie ab.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit lehnt man die Nullhypothese irrtümlich ab? Verwenden Sie dabei die Normalverteilung. 7 BE

**Lösung**

| Ziffernschloß: | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Stellenzahl —> | 1 | 2 | 3 | 4 |

Ziffern $n_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $1 \leq i \leq 4$

1. a) Die Aufgabenstellung läßt sich wie folgt aufteilen:

   i) **Annahme**: An den ersten beiden Stellen befinden sich die übereinstimmenden Ziffern: $n_1 = n_2$ .
   Da es <u>genau zwei</u> gleiche Ziffern geben soll, dürfen $n_3$, $n_4$ diesen Wert nicht annehmen. Für $n_3$ gibt es somit 6 Möglichkeiten, für $n_4$ 5 Möglichkeiten $(n_3 \neq n_4\ !)$ .

   ii) Für den gemeinsamen Wert von $n_1$ und $n_2$ gibt es 7 Möglichkeiten.

   iii) Die beiden übereinstimmenden Ziffern müssen nicht an den ersten beiden Stellen auftreten, sie können beliebig verteilt sein. Hierfür gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten.

   iv) Es gibt insgesamt $7^4$ Möglichkeiten, die Ziffern ohne Einschränkung am Zahlenschloß einzustellen.

   Nach dem Zahlprinzip ergibt sich daher folgender Anteil p der gesuchten Geheimzahlen unter allen möglichen Geheimzahlen:

$$p = \frac{\binom{4}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{7^4} = \frac{6^2 \cdot 5}{7^3} = \frac{180}{343} \qquad \underline{p \approx 52{,}5\%} \quad .$$

   Bei den 4 Stellen gibt es genau 3 benachbarte Stellen ($n_1 - n_2$, $n_2 - n_3$, $n_3 - n_4$). Nach 1.a) Ziffer iii) gibt es $\binom{4}{2} = 6$ Stellmöglichkeiten für die übereinstimmenden Ziffern. Somit lautet der Bruchteil der gesuchten Geheimziffern mit benachbarten gleichen Ziffern: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

b) Die Ereignisse Z und U sind genau dann voneinander unabhängig, wenn gilt: $p(Z) \cdot p(U) = p(Z \cap U)$ .
   Aus 1.a) gilt: $p(Z) = \frac{180}{343} = \frac{1260}{2401}$ .

   **Berechnung von p(U) :**
   In der Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} gibt es genau 4 ungerade Elemente. Sollen ausschließlich solche ungeraden Zahlen als Ziffern (ohne Einschränkung auftreten), so gibt es hierfür $4^4$ Möglichkeiten bei $7^4$ Gesamtmöglichkeiten (vgl. 1.a) Ziffer iv)) .
   Also folgt: $p(U) = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$ .

   **Berechnung von p(Z∩U):**
   Unter den ungeraden Zahlen sollen genau 2 übereinstimmen. Wie unter 1.a) überlegt man sich: $p(Z \cap U) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7^4} = \frac{144}{2401}$ .

   **Überprüfung der Unabhängigkeit:**

$$p(Z \cap U) = \frac{144}{2401}$$

$$p(Z) \cdot p(U) = \frac{1260}{2401} \cdot \frac{256}{2401} \qquad \text{Also: } p(Z) \cdot p(U) \neq p(Z \cap U)$$

   Die Ereignisse sind somit voneinander abhängig.

c) Da nur das Ereignis $Z \subset \Omega$ ($\Omega$: Ergebnisraum) zugrundegelegt wird, handelt es sich hier um eine bedingte Wahrscheinlichkeit $p_Z(U)$:

$$p_Z(U) = \frac{p(Z \cap U)}{p(Z)} \qquad \text{(vgl. 1.b)}$$

$$p_z(U) = \frac{\frac{144}{2401}}{\frac{1260}{2401}} = \frac{144}{1260} = \frac{4}{35} \qquad \underline{p_z(U) \approx 11{,}4\%} \ .$$

2. $n = 200$, $p = \frac{1}{2401}$ (genau 1 Geheimzahl - nämlich 1234 - ist unter den 2401 möglichen Geheimzahlen - vgl. 1.a) - günstig).
Der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ ergibt sich zu: $\mu = \frac{200}{2401}$ .
Bezeichnet man mit Z die Trefferanzahl - also die Anzahl der Schlösser mit der Geheimzahl 1234 -, so gilt: $Z \geq 1$. Die Wahrscheinlichkeit P hierfür berechnet sich wie folgt aus der Poisson-Verteilung (vgl. FS. S.110):
$P(Z \geq 1) \overset{!}{=} 1 - P(Z = 0) = 1 - e^{-\mu}\frac{\mu^0}{0!} = 1 - e^{-\mu}$ . Mit dem obigen Wert für $\mu$ ergibt sich daher: $P(Z \geq 1) \approx 1 - 0{,}92008$. $\quad \underline{P(Z \geq 1) \approx 8{,}0\%}$ .

3. a) Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge n = 4 ("Stellenzahl") mit dem Parameter p = 1/7 ("Trefferwahrscheinlichkeit" der Ziffer "1").
Bezeichnet Z die Anzahl der Einsen und P die Wahrscheinlichkeit hierfür, so gilt: $P(Z = k) = B(4; \frac{1}{7}; k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^k \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{4-k} \qquad (0 \leq k \leq 4)$ .

Setzt man für k die möglichen Werte ein, so ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(Z=k) | 54,0% | 36,0% | 9,0% | 1,0% | 0,0% |

b) Für die Zufallsgrößen $X_i$ $(1 \leq i \leq 100)$ legt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung unter 3.a) zugrunde. Der zugehörige Erwartungswert $E(X_i)$ berechnet sich daher zu (vgl. FS. S. 108) :

$E(X_i) = 0 \cdot 0{,}540 + 1 \cdot 0{,}360 + 2 \cdot 0{,}090 + 3 \cdot 0{,}010 + 4 \cdot 0{,}000$
$E(X_i) = 0{,}57$
Der Erwartungswert E(Y) der zusammengesetzten Zufallsgröße Y ergibt sich

somit: $E(Y) = E(\sum_{i=1}^{100} X_i) \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{100} E(X_i)$ (vgl. FS. S. 108)

$E(Y) = 100 \cdot 0{,}57 = 57$

c) Die Ungleichung von Tschebyschow lautet (vgl. FS. S. 109 bzw.S. 107):
$P(|Y - E(Y)| < a) \;\geq\; 1 - \frac{Var(Y)}{a^2}$ (hier: a = 15) .

Die Varianz von Y errechnet sich (z.B.) wie folgt (vgl. FS. S.108):
$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ .

Aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung unter 3.a) folgt:

$E(X_i^2) = 0{,}540 \cdot 0^2 + 0{,}360 \cdot 1^2 + 0{,}090 \cdot 2^2 + 0{,}010 \cdot 3^2 = 0{,}000 \cdot 4^2$

$E(X_i^2) = 0{,}81$ .

**Zusammenfassend:**
$Var(X_i) = 0{,}81 - 0{,}57^2 = 0{,}4851$
Da die Zufallsgrößen $X_i (1 \leq i \leq 100)$ paarweise voneinander unabhängig sind (dies ergibt sich unmittelbar aus der zufälligen Auswahl der 100 Ziffernschlösser), gilt (vgl. FS. S. 109):

$Var(Y) = Var\,(\sum_{i=1}^{100} X_i) = \sum_{i=1}^{100} Var(X_i)$ .

Für Var(Y) erhält man abschließend: $Var(Y) = 100 \cdot 0{,}4851 = 48{,}51$ .

Setzt man dieses Ergebnis in die Tschebyschow-Ungleichung ein, gilt:

$$P(|Y - E(Y)| < 15) \geq 1 - \frac{48,51}{15^2}$$

$$P(|Y - E(Y)| < 15) \leq 0,7844$$

Die gesuchte Mindestwahrscheinlichkeit beträgt also zirka 78,4% .

4. In der Nullhypothese ist die Wahrscheinlichkeit $p_o$ = 36,0 % für den Anteil der Geheimzahlen, die die Ziffer 1 genau einmal enthalten, genannt. $p_o$ ist auch der Wahrscheinlichkeitsverteilung von 3.a) zu entnehmen. Bei 20 000 Schlössern kann daher ungefähr von 7200 (=20 000·0,36) Schlössern der genannten Art ausgegangen werden. 7200 ist daher die Mitte des angegebenen Intervalls [7100;7300] .

$H_o$ : $p_o = 0,36$ , $\overline{H_o}$: $p_o \neq 0,36$

Die Annahmebereiche $A_o$, $\overline{A_o}$ lauten hierzu:

$A_o = [7100;7300]$ , $\overline{A_o} = [0;7099] \cup [7301;20\,000]$

Die Nullhypothese $H_o(p_o = 0,36)$ lehnt man irrtümlicherweise ab, wenn der Annahmebereich $\overline{A_o}$ vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit P hierfür lautet:

$$P^{20000}_{0,36}\ (\overline{A_o}) = P^{20000}_{0,36}\ (T < 7100 \text{ oder } T > 7300) \ .$$

Es soll zur Berechnung von P die Normalverteilung verwendet werden (vgl. FS. S. 111):

Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 20\,000 \cdot 0,36 = 7200$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{20\,000 \cdot 0,36 \cdot 0,64} \approx 67,9$

$$P(\overline{A_o}) = 1 - P(7200 - 100 \leq T \leq 7200 + 100) =$$
$$= 1 - [P(T \leq 7200 + 100) - P(T \leq 7200 - 100)]$$

Es gilt (vgl. III, Nr. 3b)):

$$P(T \leq 7200 - 100) = 1 - P(T \leq 7200 + 100) \ .$$

Also: $P(\overline{A_o}) = 1 - P(T \leq 7300) + 1 - P(T \leq 7300) = 2 \cdot (1 - P(T \leq 7300))$ .

Mit $P(T \leq t) \approx \Phi\left(\frac{t - \mu + 0,5}{\sigma}\right)$ (vgl. FS. S. 111) folgt:

$$P(\overline{A_o}) = 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{7300 - 7200 + 0,5}{67,9}\right)\right) = 2 \cdot (1 - \Phi(1,48)) = 2 \cdot (1 - 0,93056)$$

(vgl. Tabelle)

$P(\overline{A_o}) = 0,13888$ .

Die Nullhypothese wird also mit zirka 13,9% Wahrscheinlichkeit abgelehnt.

## Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1988
## Aufgabe V: Analytische Geometrie

Durch die Punkte A(0/0/0), B(10/0/0), C(6/12/0) und D(6/2/8) ist eine auf der $x_1x_2$-Ebene stehende dreiseitige Pyramide gegeben. Die Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen, werde mit $E_1$, diejenige, in der die Punkte A, C und D liegen, mit $E_2$ bezeichnet.

1. a) Legen Sie ein Schrägbild des kartesischen Koordinatensystem an (z.B. gemäß untenstehender Skizze, Ursprung in Blattmitte, Querformat, Einheit 1 cm), und zeichnen Sie die Pyramide ABCD ein. 3 BE

   b) Bestimmen Sie einen Lotvektor $\vec{n}_1$ der Ebene $E_1$ und einen Lotvektor $\vec{n}_2$ der Ebene $E_2$ und zeigen Sie, daß $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ linear unabhängig, dagegen $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\overrightarrow{BD}$ linear abhängig sind. Welche Dimension hat also der von den Vektoren $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ aufgespannte Vektorraum? 7 BE

2. Es sei $h_B$ die Lotgerade von B auf $E_2$ und $h_D$ die Lotgerade von D auf $E_1$.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes H von $h_B$ und $h_D$ und die Koordinaten des Fußpunktes $D_0$ des Lotes $h_D$. 7 BE

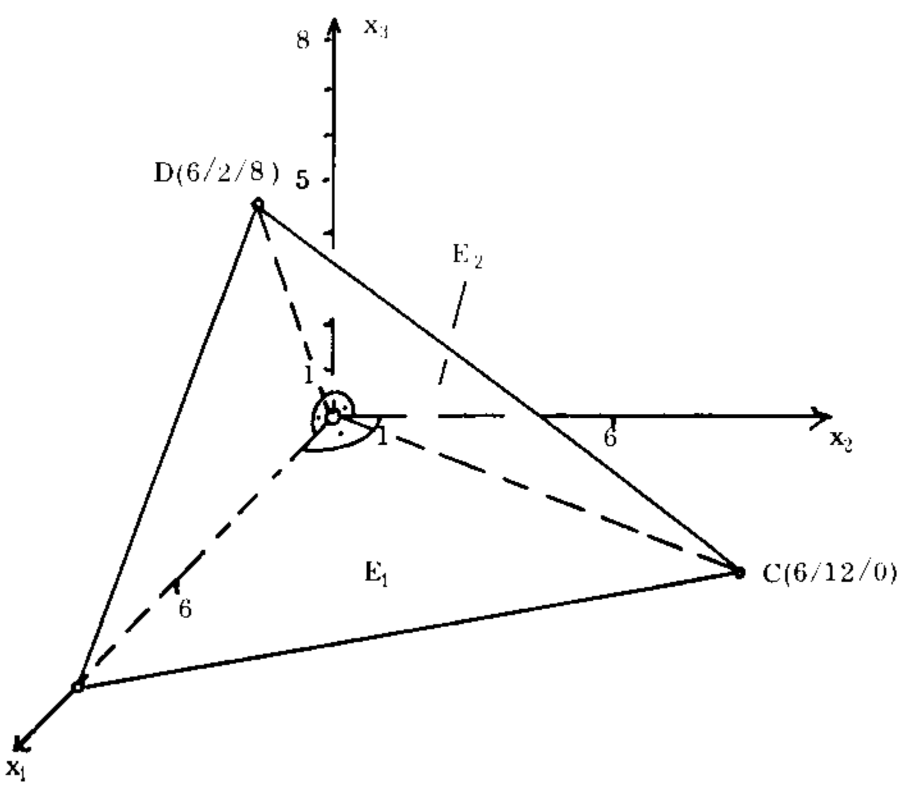
   [Zur Kontrolle: H(6/2/2,5)]

   b) Die durch die Punkte B, D und H bestimmte Ebene sei $E_3$. Sie hat mit der Kante [AC] den Punkt G gemeinsam. Tragen Sie H und $D_0$ in die angelegte Zeichnung ein und konstruieren Sie damit den Punkt G und den Fußpunkt $B_0$ des Lotes $h_B$. 7 BE

   c) Zeigen Sie rechnerisch, daß die Geraden GH und BD sich senkrecht schneiden. Wie kann man dieses Ergebnis ohne Rechnung erschließen? 6 BE

### Lösung

1. a)



b) Die Ebene $E_1 = E(A,B,C)$ ist die $x_1x_2$-Ebene $x_3 = 0$: $\quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einen Normalenvektor zur Ebene $E_2 = E(A,C,D)$ erhält man über das Vekorprodukt der beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ -48 \\ -60 \end{pmatrix}$ . Ein möglicher Normalenvektor ist also $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Vektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind offensichtlich nicht parallel (1. Komponente von $\vec{n}_1$ ist 0, 1. Komponente von $\vec{n}_2$ ist $-8 \neq 0$).

$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

Zur Überprüfung der linearen Abhängigkeit verwendet man z.B. das Determinantenkriterium: $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig.

Hier: $\begin{vmatrix} 0 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$ , weil die 1. Zeile ein Vielfaches der 2. Zeile ist.

(Anderer Weg: $x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{0}$
besitzt eine "nicht-triviale" Lösung, etwa $z = 1$ ; $y = -0{,}5$ ; $x = 5{,}5$)

**Ergebnis:**

Die Vektoren $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\overrightarrow{BD}$ sind linear abhängig, $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ .
Die Vektoren spannen also einen zweidimensionalen Vektorraum auf.

2. a) $h_B$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ , $\quad h_D$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zur Bestimmung von $h_B \cap h_D$ setze:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dies führt auf drei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

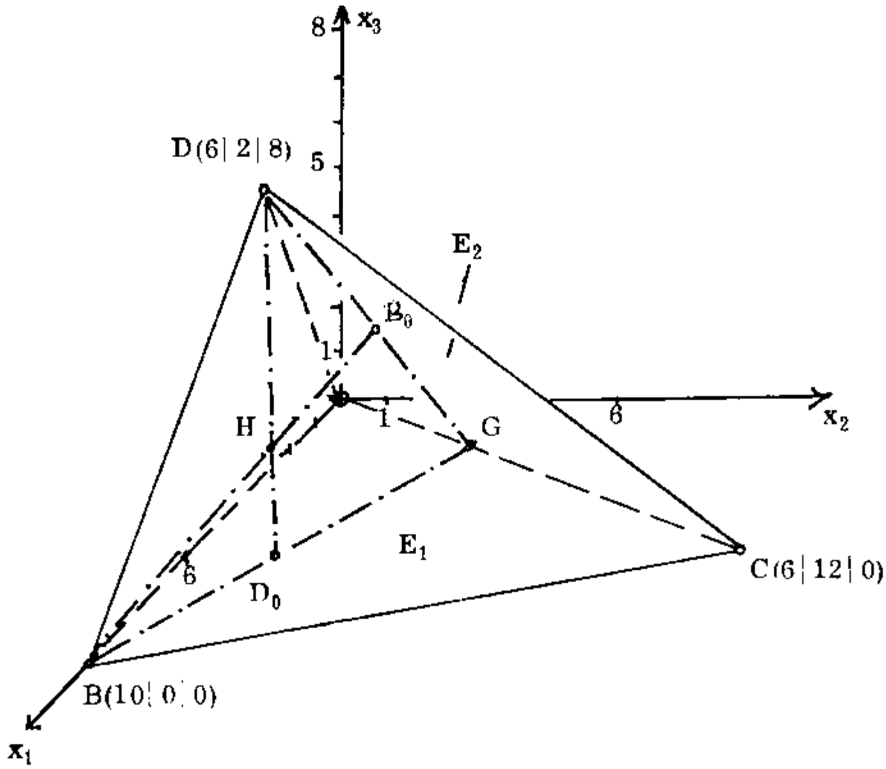
$$\left.\begin{aligned} 4 - 8\lambda &= 0 ; \\ -2 + 4\lambda &= 0 ; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = 1/2$$
$$-8 + 5\lambda - \mu = 0 ; \quad \Rightarrow \mu = -11/2 .$$

("Im allgemeinen" hat dieses Gleichungssystem keine Lösung; dann sind die Geraden windschief (oder parallel)) .

Über $h_B$ mit $\lambda = \frac{1}{2}$ gewinnen wir den Schnittpunkt mit den Koordinaten $H(6;2;2^1/_2)$.

Da $h_D$ parallel zur $x_3$-Achse, gewinnen wir den Fußpunkt $D_O$ von $h_D$ auf die $x_1x_2$-Ebene $x_3 = 0$ sofort: $D_O(6;2;0)$ .

b) Man verlängert $BD_O$ bis die Gerade AC in G trifft. Dann ist $GD \cap BH = \{B_O\}$




c) • Richtungsvektor der Geraden GH. Zuerst muß man dazu die Koordinaten von G berechnen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda^{*}\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}}_{\text{Gerade } BD_0} = \underbrace{\mu^{*}\cdot\begin{pmatrix}6\\12\\0\end{pmatrix}}_{\text{Gerade } AC} .$$

bzw: $\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ .

oder $10 - 2\lambda = \mu$ und
$\lambda = 2\mu$

• Die zweite in die erste Gleichung ergibt $10 - 4\mu = \mu$ ,
also $\mu = 2$ $(\lambda = 4)$.

$\Rightarrow G(2;4;0)$

$\Rightarrow \vec{GH} = \begin{pmatrix}4\\-2\\2{,}5\end{pmatrix}$ , $\vec{BD} = \begin{pmatrix}-4\\2\\8\end{pmatrix}$

$\vec{GH}\cdot\vec{BD} = -16 - 4 + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad GH \perp BD$ .

Ohne Rechnung kann man dieses Ergebnis wie folgt erschließen:

Im Dreieck BGD sind BH und DH zwei Höhen, H ist also Höhenschnittpunkt. Dann muß GH die dritte Höhe dieses Dreiecks sein, d.h. GH ist senkrecht zu BD.

**Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1988**
**Aufgabe VI: Analytische Geometrie**

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Schar der Geraden

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4a \\ 1 \\ 3a \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a, \sigma \in \mathbb{R}$$

durch den Punkt A(6/5/8) sowie die Gerade

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}$$

gegeben.

1. a) Zeigen Sie, daß der Punkt A nicht auf h liegt. 2 BE

   b) Weisen Sie nach, daß jede Schargerade $g_a$ die Gerade h schneidet, und daß durch jeden Punkt von h eine Schargerade geht. 6 BE

   c) Begründen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, daß alle Geraden $g_a$ in einer Ebene $E_1$ liegen. Stellen Sie eine Gleichung von $E_1$ in Normalenform auf.
   [Mögliches Ergebnis: $E_1$: $3x_1 + 4x_3 - 50 = 0$] 5 BE

   d) k sei diejenige Gerade durch A, die in $E_1$ liegt, nicht aber zur Geradenschar $g_a$ gehört. Welche besondere Lage im Koordinatensystem haben $E_1$, h und k? 4 BE

2. a) Der Punkt B(10/0/5) liegt auf der Geraden h. Durch den Punkt A wird die zu AB senkrechte Ebene $E_2$ gelegt. Sie schneidet h in C. Berechnen Sie die Koordinaten von C. 4 BE

   b) Die Schnittgerade von $E_1$ und $E_2$ gehört zur Schar der Geraden $g_a$. Berechnen Sie den zugehörigen Parameterwert a. 3 BE

3. Ein Punkt F wird auf der Geraden h so gewählt, daß die Pyramide OABF den Rauminhalt $\frac{125}{3}$ erhält. Berechnen Sie die Koordinaten eines solchen Punktes. 6 BE

**Lösung**

1. a) A liegt auf h, wenn es ein $\mu_o \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu_o \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

   Aus der zweiten Komponentenzeile liest man ab: $5 = 0 + \mu_o \cdot 0$.
   Dies kann für kein $\mu_o$ erfüllt werden; A liegt somit nicht auf h.

   b) Man stellt die Schnittbedingung der Geraden $g_a$ und h auf, indem man die Geradengleichungen gleichsetzt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -4a \\ 1 \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Folgende Gleichungen ergibt ein komponentenweises Vorgehen:

| | | |
|---|---|---|
| (I) | $6 - 4a\sigma = 10 - 4\mu$ , | $\mu - a\sigma = 1$ |
| (II) | $5 + \sigma = 0$ , | $5 + \sigma = 0$ |
| (III) | $8 + 3a\sigma = 5 + 3\mu$ , | $\mu - a\sigma = 1$ |

Die Gleichungen (I) und (III) sind äquivalent, aus Gleichung (II) liest man $\sigma = -5$ ab.
Setzt man dies in (I) ein, so erhält man die Schnittbedingung:
(*) $\mu + 5a = 1$ .

Aus dieser **linearen** Gleichung (*) erkennt man, daß es zu jedem $a \in \mathbb{R}$ ein zugehöriges $\mu \in \mathbb{R}$ gibt, so daß (*) erfüllt ist (z.B. durch Auflösen von (*) nach $\mu$!). Jede Schargerade schneidet somit die Gerade h.
Umgekehrt gibt es zu jedem $\mu \in \mathbb{R}$ ein $a \in \mathbb{R}$, so daß (*) erfüllt ist. Durch jeden Punkt von h verläuft somit eine Gerade der Schar $g_a$.

**Eine Veranschaulichung**

Man formt die <u>Geraden</u>gleichung $g_a$ (mit den <u>zwei</u> Parametern a, $\sigma$) zu einer <u>Ebenen</u>gleichung um:

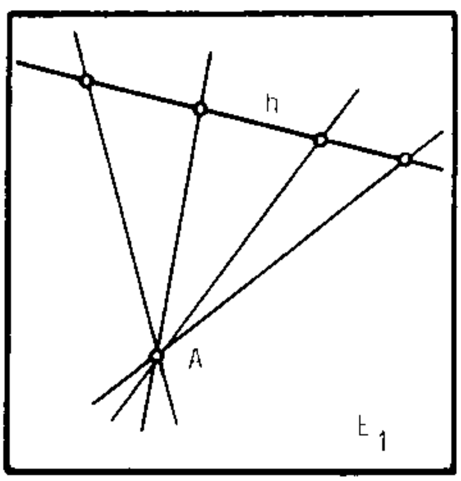
$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}-4a\\1\\3a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4a\sigma\\\sigma\\3a\sigma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4a\sigma\\0\\3a\sigma\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\sigma\\0\end{pmatrix}.$$

Mit $a\cdot\sigma = \tau \in \mathbb{R}$ gilt dann :

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} .$$

Mit $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ ist dies die Parametrisierung einer Ebene $E_1$ .

$g_a$ ist somit ein ebenes Geradenbündel durch den Punkt A (vgl. Figur 1).
Wie man **leicht** sieht, liegt h in dieser gefundenen Ebene $E_1$:
Für $\sigma = 0$ liegt eine Parametisierung von h vor. h gehört aber nicht zur Geradenschar von $g_a$, da mit $\sigma = 0$ aus $a\cdot\sigma = \tau$, auch $\tau = 0$ folgen würde.
In $g_a$ gibt es also keine zu h parallele Gerade. Figur 1 veranschaulicht zusammenfassend die Verhältnisse.




c) **1. Lösungsmöglichkeit**

Aufgrund von 1a), b) liegen die Geraden von $g_a$ in der von A und h aufgespannten Ebene $E_1$.
Die Gleichung von $E_1$ lautet zunächst in Vektorform:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} + \lambda\cdot\left[\begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\0\\5\end{pmatrix}\right] + \mu\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix} .$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-4\\5\\3\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix} \quad .$$

Diese Vektorform wird nun in Normalenform umgewandelt:
Ein Normalenvektor $\vec{n}$ von $E_1$ gewinnt man mit Hilfe des Vektorprodukts der beiden Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-4\\5\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}5 & 3\\0 & 3\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}-4 & 3\\-4 & 3\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-4 & 5\\-4 & 0\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\0\\20\end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

Es kann also angesetzt werden: $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix}\right) = 0$

$$3x_1 + 4x_3 - (18 + 32) = 0$$

$\underline{E_1\colon 3x_1 + 4x_3 - 50 = 0}$

**2. Lösungsmöglichkeit**

Wie aus 1b) ("Veranschaulichung") hervorgeht, erhält man die Vektorform von $E_1$ unmittelbar aus $g_a$:

$$E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad (\tau, \sigma \in \mathbb{R}) \; .$$

Die Umformung zur Normalengleichung kann wie oben oder mit Hilfe einer Determinantengleichung erfolgen:

Sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ die Richtungsvektoren der Ebenenparametisierung und $\vec{a}$ der zugehörige Aufhängepunkt, so gilt:

$\det(\vec{x} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, bzw. $\det(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{a}, \vec{u}, \vec{v})$ .

Setzt man hierin die gegebenen Werte ein, so folgt:

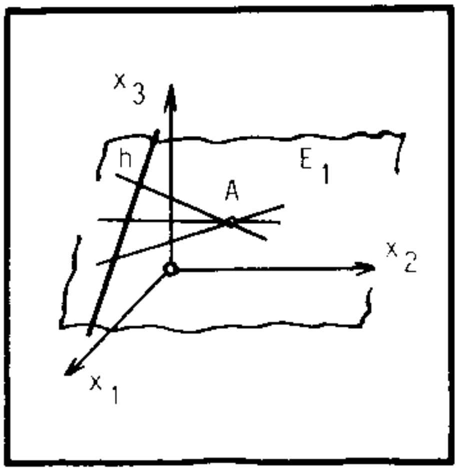
$\begin{vmatrix}x_1 & -4 & 0\\x_2 & 0 & 1\\x_3 & 3 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}6 & -4 & 0\\5 & 0 & 1\\8 & 3 & 0\end{vmatrix}$ . Ausrechnen ergibt : $\underline{3x_1 + 4x_3 - 50 = 0}$

d) i) $E_1\colon 3x_1 + 4x_3 - 50 = 0$

Aufgrund des Fehlens der $x_2$-Koordinate in obiger Gleichung gilt:
$E_1 \parallel x_2$-Achse

ii) $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\5\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$

Da hier $x_2 = 0$ erfüllt ist, gilt: h liegt in der $x_1x_3$-Ebene .
Figur 2 gibt den Sachverhalt wieder:




Da jede Gerade von $g_a$ die Gerade h schneidet, muß k parallel zu h in der Ebene $E_1$ (durch den Punkt A) verlaufen (vgl. auch 1.b) ("Veranschaulichung")).

2. a) A(6/5/8) , B(10/0/5)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}10\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-5\\-3\end{pmatrix} \quad . \qquad \vec{AB} \text{ ist Normalenvektor von } E_2:$$

$$E_2: = \begin{pmatrix}4\\-5\\-3\end{pmatrix} \cdot \left( \vec{x} - \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} \right) = 0$$

$$4x_1 - 5x_2 - 3x_3 - (24 - 25 - 24) = 0$$
$$\underline{4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 25 = 0}$$

h wird mit $E_2$ geschnitten, indem man die Komponenten von h in $E_2$ einsetzt:

$$4\cdot(10 - 4\mu) - 5\cdot 0 - 3(5 + 3\mu) + 25 = 0$$
$$40 - 16\mu - 15 - 9\mu + 25 = 0$$
$$-25\mu + 50 = 0 \quad , \quad \mu = 2$$

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix}10\\0\\5\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix} \quad , \quad \underline{C(2/0/11)}$$

b) $h \subset E_1$ , $E_2 \cap h = C$
Der Punkt C liegt also in $E_1$ und in $E_2$; er liegt also auf der Schnittgeraden von $E_1$ und $E_2$. Da diese Schnittgerade laut Vorgabe Element der Geradenschar $g_a$ ist, muß es ein $a_o \in \mathbb{R}$ geben, so daß $C \in g_{a_o}$ erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix}2\\0\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}-4a_o\\1\\3a_o\end{pmatrix} \quad .$$

Mit $\sigma = -5$ (vgl. 2. Komponente) erhält man aus der 1. Komponente:

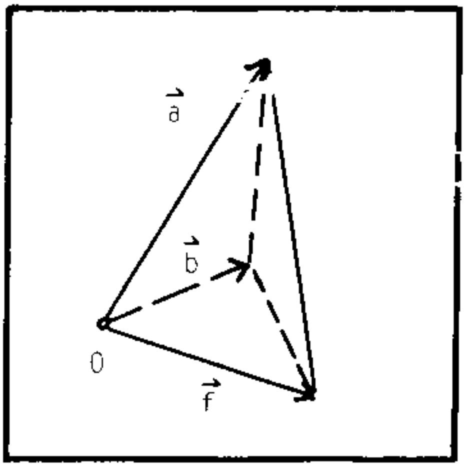
$$2 = 6 + (-5)\cdot(-4a_o) \ .$$
$$-4 = 20\,a_o \ , \qquad \underline{a_o = -0{,}2}$$

(Nachrechnen ergibt, daß mit diesen Werten auch die dritte Komponentengleichung erfüllt ist!)

3. A(6/5/8), B(10/0/5), O(0/0/0)

$F \in h$: $F(10 - 4\mu/0/5 + 3\mu)$

OABF ist eine dreiseitige Pyramide mit Spitze O und den aufspannenden Kanten $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{f}$ (vgl. Figur 3).




Für das Volumen V dieser Pyramide gilt (vgl. FS. S. 80): $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\vec{f}\cdot(\vec{a} \times \vec{b})\right|$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}10\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}5 & 8\\0 & 5\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}6 & 8\\10 & 5\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}6 & 5\\10 & 0\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\50\\-50\end{pmatrix} ; \qquad F \in h: \quad \begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10-4\mu\\0\\5+3\mu\end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot |25\cdot(10 - 4\mu) - 50\cdot(5 + 3\mu)|$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 250\ |\mu| , \qquad V = \frac{125}{3}\ |\mu|$$

Mit $V = \frac{125}{3}$ folgt $|\mu| = 1$, also $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = -1$.

Setzt man diese Werte in die Geradengleichung von h ein, so erhält man die gesuchten Punkte $F_1$, $F_2$:

<u>$F_1(6/0/8)$</u> , <u>$F_2(14/0/2)$</u>.