Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1989
Aufgabe I: Infinitesimalrechnung

Gegeben ist die Funktionenschar $f_c\colon x \longmapsto \dfrac{x^2 + c - 4}{x + 2}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $c \in \mathbb{R}^+$.

1. a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Scharkurven mit den Koordinatenachsen, und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an. Führen Sie, falls nötig, Fallunterscheidungen durch. — 5 BE

   b) Bestimmen Sie die Extrema der Scharfunktionen f_c, und ermitteln Sie die Ortskurve der Tiefpunkte aller Scharkurven. — 7 BE

   [Teilergebnis: $f_c'(x) = 1 - \dfrac{c}{(x+2)^2}$]

   c) Zeichnen Sie unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse im Bereich $-6 \le x \le 4$ die Asymptoten, den Graphen der Funktion f_1 und die Ortskurve der Tiefpunkte (Hochformat, Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte, Längeneinheit 1 cm) — 6 BE

   d) Weisen Sie nach, daß jede Scharkurve punktsymmetrisch ist. — 5 BE

2. Betrachtet wird nun die Funktion $F\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt$, $x > -2$.

   a) Geben Sie, ohne die Integration auszuführen, die Abszissen der Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von F an. — 3 BE

   b) Bestimmen Sie, ebenfalls ohne Ausführung der Integration, das Monotonieverhalten von F in $\mathbb{R}^+$, und begründen Sie, warum F dort genau eine Nullstelle x_0 besitzt. — 4 BE

   In den Teilaufgaben 2c und 2d sind Rechenergebnisse jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

   c) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von F(x).

   Berechnen Sie $F(-\sqrt{3})$ und $F(\sqrt{3})$, und geben Sie den Inhalt A des von der x-Achse und dem Graphen von f_1 eingeschlossenen Flächenstücks an. — 5 BE

   [Teilergebnis: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + \ln(x+2) - \ln 2$]

   d) Zur genaueren Bestimmung von x_0 (Teilaufgabe 2b) wird nun die Funktion

   $g\colon x \longmapsto x - \sqrt{3}$, $x \in \mathbb{R}$, eingeführt. Zeigen Sie, daß für $x \ge \sqrt{3}$ gilt: $g(x) \ge f_1(x)$.

   Bestimmen Sie die reelle Zahl $a > \sqrt{3}$ so, daß

   $$\int_0^{\sqrt{3}} f_1(t)\,dt + \int_{\sqrt{3}}^{a} g(t)\,dt = 0 \text{ gilt}$$

   Entscheiden Sie, ob $x_0 \le a$ oder $x_0 \ge a$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
   Berechnen Sie $F(2\sqrt{3})$, und geben Sie dann ohne weitere Rechnung mit Hilfe der gefundenen Ergebnisse ein möglichst kleines Intervall an, in dem x_0 liegt. — 8 BE

   e) Untersuchen Sie das Verhalten von F am linken Rand des Definitionsbereichs, und skizzieren Sie den Graphen von F unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1c. — 7 BE

Lösung

1. a) x-Achse: $x^2 + c - 4 = 0 \quad x = \pm\sqrt{4-c}$ für $c \le 4$; keine Nullstelle für $c>4$

y-Achse: $y = \frac{c-4}{2}$

$$f_c(x) = \frac{x^2 - 4 + c}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2) + c}{x+2} = x - 2 + \frac{c}{x+2}$$

schiefe Asymptote: $y = x-2$ Annäherung erfolgt

für $x \to +\infty$ von oben $\left(\frac{c}{x+2} > 0\right)$

für $x \to -\infty$ von unten $\left(\frac{c}{x+2} < 0\right)$

senkrechte Asymptote: $x = -2$ mit $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} f_c(x) = -4 + \frac{c}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} f_c(x) = -4 + \frac{c}{0^-} = -\infty$

b) $f_c'(x)$ ergibt sich einfach aus $f_c(x) = x - 2 + \frac{c}{x+2}$

$$f_c'(x) = 1 - \frac{c}{(x+2)^2}$$

oder umständlicher aus $f_c(x) = \frac{x^2 + c - 4}{x+2}$

$$f_c'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2+c-4)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 - c + 4}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 4 - c}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(x+2)^2 - c}{(x+2)^2} = 1 - \frac{c}{(x+2)^2}$$

$f_c'(x) = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = c \qquad x + 2 = \pm\sqrt{c} \qquad x = -2 \pm\sqrt{c}$

Bestimmung der Art mit $f''(x)$

$$f_c''(x) = \frac{c\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2c}{(x+2)^3}$$

$f_c''(-2+\sqrt{c}) = \frac{2c}{\sqrt{c}^3} > 0 \qquad (-2+\sqrt{c} \mid -4+2\sqrt{c})$ Min

$f_c''(-2-\sqrt{c}) = \frac{2c}{-\sqrt{c}^3} < 0 \qquad (-2-\sqrt{c} \mid -4-2\sqrt{c})$ Max

Bestimmung der Art mit Monotonie

$f_c'(x) > 0 \Rightarrow (x+2)^2 > c \qquad x + 2 > \sqrt{c} \qquad x > -2 + \sqrt{c}$

$\qquad x + 2 < -\sqrt{c} \qquad x < -2 - \sqrt{c}$

$f_c'(x) < 0 \Rightarrow (x+2)^2 < c \qquad x + 2 < \sqrt{c} \qquad x < -2 + \sqrt{c}$

$\qquad x + 2 > -\sqrt{c} \qquad x > -2 - \sqrt{c}$

+ + +	Max	- - - - -	Min	+ + +	$\frac{\operatorname{sgn} f_c'(x)}{x}$
	$-2-\sqrt{c}$		$-2+\sqrt{c}$		

$x_{Min} = -2 + \sqrt{c} \qquad x_{Min} + 2 = \sqrt{c}$

$y_{Min} = -4 + 2\sqrt{c} = -4 + 2(x_{Min}+2) = -4 + 2x_{Min} + 4 = 2x_{Min}$

Ortskurve der Minima: $y = 2x$ (ist auch Ortskurve der Maxima)

c) $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Schnitt mit Koordinatenachsen: $(\pm\sqrt{3} \mid 0)$ $\quad (0 \mid -\frac{3}{2})$

Extremwerte: Min $(-1 \mid -2)$ Max $(-3 \mid -6)$

zusätzlich: $f_1(-6) = -8{,}25$ $\quad f_1(-1{,}5) = -1{,}5$

$f_1(-4) = -6{,}5$ $\quad f_1(1) \approx -0{,}67$

$f_1(-2{,}5) = -6{,}5$ $\quad f_1(4) \approx 2{,}17$

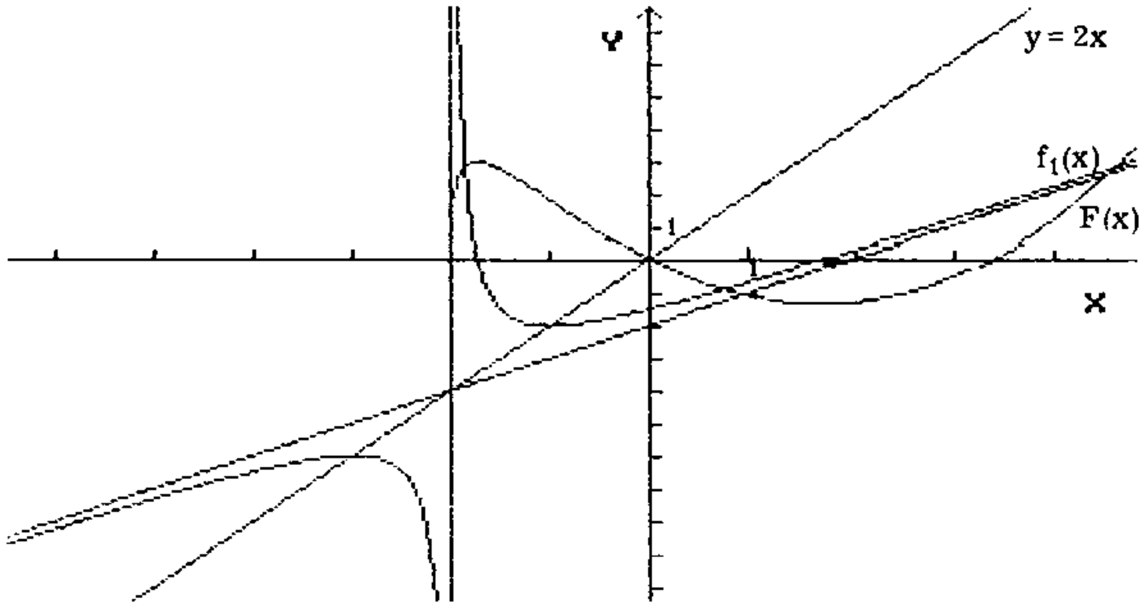


Abb. 1

d) $f_c(x)$ ist punktsymmetrisch zu $P(a \mid b)$, wenn
$f_c(a+t) - b = b - f_c(a-t)$.
Aus der Zeichnung (und den Funktionswerten) vermutet man $P(-2 \mid -4)$ als Schnittpunkt der Asymptoten als Symmetriepunkt.

$f_c(-2+t) + 4 = -4 - f_c(-2-t)$ müßte also gültig sein

$$f_c(-2+t) + 4 = (-2+t) - 2 + \frac{c}{t} + 4 = t + \frac{c}{t}$$

$$-4 - f_c(-2-t) = -4 - (-2-t) + 2 - \frac{c}{-t} = t + \frac{c}{t}$$

=> alle Scharkurven sind punktsymmetrisch zu $P(-2 \mid -4)$

2. a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2 - 3}{t + 2}\,dt$, $\quad x > -2$

Wegen $F'(x) = f_1(x)$ und $F''(x) = f_1'(x)$

erhält man $x_{Max} = -\sqrt{3}$; $\quad x_{Min} = +\sqrt{3}$

und $x_{Wende} = -1$

b) $f_1(x) < 0$ in $]0; \sqrt{3}\,[$ $\Rightarrow$ $F(x)$ fällt

$f_1(x) > 0$ in $]\sqrt{3}\,; +\infty[$ $\Rightarrow$ $F(x)$ steigt

da $F(0) = 0$ (obere Grenze = untere Grenze) und $F(x)$ fällt in $]0;\sqrt{3}\,[$, muß $F(\sqrt{3}\,) = F(\text{Min}) < 0$ sein; da $F(x)$ in $]\sqrt{3}\,; +\infty[$ steigt und $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ (wegen $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$), muß $F(x)$ in $\mathbb{R}^+$ genau eine Nullstelle besitzen.

c) $$F(x) = \int_0^x \frac{t^2-3}{t+2}\,dt = \int_0^x \left(t-2+\frac{1}{t+2}\right) dt = \left[\tfrac{1}{2}t^2 - 2t + \ln|t+2|\right]_0^x =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x+2) - \ln 2$$

$F(-\sqrt{3}) \approx 2{,}95$ $\qquad$ $F(\sqrt{3}) \approx -1{,}34$

$$A = -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f_1(x)\,dx = -\int_{-\sqrt{3}}^{0} f_1(x)\,dx - \int_0^{\sqrt{3}} f_1(x)\,dx = \int_0^{-\sqrt{3}} f_1(x)\,dx - \int_0^{\sqrt{3}} f_1(x)\,dx =$$

$$= F(-\sqrt{3}) - F(\sqrt{3}) \approx 4{,}29$$

d) $x - \sqrt{3} \ \geq\ x - 2 + \dfrac{1}{x+2}$ für $x \geq \sqrt{3}$

$2 - \sqrt{3} \ \geq\ \dfrac{1}{x+2}$;

$2 - \sqrt{3} \ \geq\ \dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$, wenn $\sqrt{3}$ kleinster Wert für x, ist $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$ größter Wert für $\dfrac{1}{x+2}$. Abschätzung gilt also für $x > \sqrt{3}$ erst recht.

$(2-\sqrt{3}\,)(\sqrt{3}+2) \geq 1$, somit $4 - 3 \geq 1$, also erfüllt .

$$\int_0^{\sqrt{3}} f_1(t)\,dt + \int_{\sqrt{3}}^{a} g(t)\,dt = 0$$

$$F(\sqrt{3}\,) + \left[\tfrac{1}{2}t^2 - \sqrt{3}\,t\right]_{\sqrt{3}}^{a} = F(\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}a^2 - \sqrt{3}\,a - \tfrac{3}{2} + 3 = 0$$

$$a^2 - 2\sqrt{3}\,a + 2F\sqrt{3} + 3 = 0$$

$$a = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-8F\sqrt{3}-12}}{2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{-2F\sqrt{3}}$$, wegen $a > \sqrt{3}$ zählt nur "+"

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{-2F(\sqrt{3}\,)} \approx 3{,}37$$

$$F(a) = \int_0^a f_1(t)\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} f_1(t)\,dt + \int_{\sqrt{3}}^{a} f_1(t)\,dt \leq \int_0^{\sqrt{3}} f_1(t)\,dt + \int_{\sqrt{3}}^{a} g(t)\,dt = 0$$

Aus $F(a) \leq 0$, $F(x_0) = 0$ und $F(x)$ streng monoton steigend in $]\sqrt{3}; +\infty[$ folgt $a \leq x_0$.

$F(2\sqrt{3}\,) \approx 0{,}08 > 0$;

$a \leq x_0 \leq 2\sqrt{3}$; $\qquad$ $3{,}37 \leq x_0 \leq 3{,}46$

e) $\lim_{x\to-2} F(x) = \lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x+2) - \ln 2\right) = 2+4+$ "$\ln 0^+$" $- \ln 2 = -\infty$.

Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1989
Aufgabe II: Infinitesimalrechnung

Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a:

$x \longmapsto \dfrac{2 \cdot e^x}{a + e^{2x}}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{D} = \mathbb{R}$;
die Graphen werden mit G_a bezeichnet.

1. a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehung:

   $f_a(\ln\sqrt{a}+d) = f_a(\ln\sqrt{a}-d)$ mit $d \in \mathbb{R}$.
   Welche geometrische Bedeutung hat diese Beziehung für die Graphen G_a? **5 BE**

   b) Untersuchen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$.
   Geben Sie die Monotoniebereiche sowie die Lage und Art des Extrempunktes an. Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte aller Graphen G_a. **8 BE**

   c) Berechnen Sie die Funktionswerte $f_1(1)$, $f_1(2)$ und $f_{0,25}(0)$.
   Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen G_1, $G_{0,25}$ sowie die Ortskurve der Extrempunkte (Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte; Längeneinheit 2 cm). **8 BE**

2. Gegeben ist die Integralfunktion $F\colon x \longmapsto \int_0^x f_1(t)\,dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$;
   der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.

   Die Teilaufgaben 2a, 2b und 2c sind ohne Berechnung des Integrals zu bearbeiten.

   a) Weisen Sie nach, daß F streng monoton steigt und daß der Graph G_F zum Ursprung symmetrisch ist. **5 BE**

   b) Zeigen Sie, daß G_F genau einen Wendepunkt W hat, und geben Sie seine Koordinaten an. Ermitteln Sie eine Gleichung der Wendetangente. **4 BE**

   c) Für $b > 0$ gilt: $F(b) > b \cdot f_1(b)$.
   Begründen Sie diese Aussage anschaulich mit Hilfe einer Flächenbetrachtung. Zeigen Sie, daß sich die Graphen G_F und G_1 im Bereich $0<x<1$ genau einmal schneiden. **7 BE**

   d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode eine integralfreie Darstellung von F(x). **5 BE**
   [Zur Kontrolle: $F(x) = 2 \cdot \arctan e^x - \frac{\pi}{2}$]

   e) Berechnen Sie den Inhalt der sich beidseitig ins Unendliche erstreckenden Fläche zwischen G_1 und der x-Achse. **3 BE**

   f) Bestimmen Sie x_0 so, daß $F(x_0) = 1$ ist. **2 BE**

   g) Skizzieren Sie nun unter Verwendung der erhaltenen Ergebnisse den Graphen G_F in das bereits angelegte Koordinatensystem. **3 BE**

Lösung

1. a) $f_a(\ln\sqrt{a}+d) = \dfrac{2e^{\ln\sqrt{a}+d}}{a+e^{2(\ln\sqrt{a}+d)}} = \dfrac{2e^{\ln\sqrt{a}}\cdot e^{d}}{a+e^{2\ln\sqrt{a}}\cdot e^{2d}} = \dfrac{2e^{\ln\sqrt{a}}\cdot e^{d}}{a+e^{\ln a}\cdot e^{2d}} = \dfrac{2\sqrt{a}\cdot e^{d}}{a+ae^{2d}}$

$f_a(\ln\sqrt{a}-d) = \dfrac{2e^{\ln\sqrt{a}-d}}{a+e^{2(\ln\sqrt{a}-d)}} = \dfrac{2e^{\ln\sqrt{a}}\cdot e^{-d}}{a+e^{2\ln\sqrt{a}}\cdot e^{-2d}} = \dfrac{2e^{\ln\sqrt{a}}\cdot e^{-d}}{a+e^{\ln a}\cdot e^{-2d}} =$

$= \dfrac{2\sqrt{a}\cdot e^{-d}\cdot e^{2d}}{(a+ae^{-2d})\cdot e^{2d}} = \dfrac{2\sqrt{a}\cdot e^{d}}{ae^{2d}+a} = f_a(\ln\sqrt{a}+d)$

G_a ist achsensymmetrisch zu $x = \ln\sqrt{a}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x}{a+e^{2x}} = „\dfrac{+\infty}{+\infty}" \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x}{e^{2x}\cdot 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0^+$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^x}{a+e^{2x}} = \dfrac{2\cdot 0}{a+0} = \dfrac{0}{a} = 0^+$, da $a \in \mathbb{R}^+$

oder:
nur einen Grenzwert berechnen und den anderen aus Symmetrie (1a) folgern

$f_a'(x) = \dfrac{2e^x(a+e^{2x}) - 2e^x\cdot e^{2x}\cdot 2}{(a+e^{2x})^2} = \dfrac{2ae^x + 2e^{3x} - 4e^{3x}}{(a+e^{2x})^2} = \dfrac{2e^x(a-e^{2x})}{(a+e^{2x})^2}$

da $2e^x > 0$ in $\mathbb{R}$ und $(a+e^{2x})^2 > 0$ in $\mathbb{R}$, genügt Überlegung für $a - e^{2x}$

$\left.\begin{array}{l} a - e^{2x} > 0 \Rightarrow a > e^{2x} \Rightarrow \ln a > 2x \Rightarrow \frac{1}{2}\ln a > x \Rightarrow \ln\sqrt{a} > x \\ a - e^{2x} < 0 \Rightarrow a < e^2x \Rightarrow \ln a < 2x \Rightarrow \frac{1}{2}\ln a < x \Rightarrow \ln\sqrt{a} < x \end{array}\right\}$ siehe 1a!

$\left.\begin{array}{l} f_a'(x) > 0 \text{ in }]-\infty; \ln\sqrt{a}[\ \Rightarrow\ f_a(x) \text{ steigt} \\ f_a'(x) < 0 \text{ in }]\ln\sqrt{a}; +\infty[\ \Rightarrow\ f_a(x) \text{ fällt} \end{array}\right. \Rightarrow \ \text{Max}(\ln\sqrt{a} \mid \frac{\sqrt{a}}{a})$

$x_{Max} = \ln\sqrt{a} \qquad e^{x_{Max}} = \sqrt{a} \qquad a = e^{2x_{Max}}$

$y_{Max} = \dfrac{\sqrt{a}}{a} = \dfrac{e^{x_{Max}}}{e^{2x_{Max}}} = \dfrac{1}{e^{x_{Max}}}$;

Ortskurve der Extrempunkte: $y = \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$

c) G_1
sym.: $x = 0$
Max $(0|1)$
$f_1(1) = \dfrac{2e}{1+e^2} \approx 0{,}65$;

$f_1(2) = \dfrac{2e^2}{1+e^4} \approx 0{,}27$

$G_{0,25}$
sym.: $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$
Max $(-\ln 2|2)$
$f_{0,25}(0) = \dfrac{2}{1{,}25} = 1{,}6$;

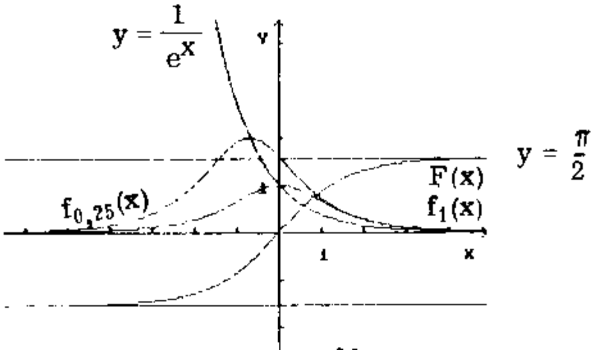


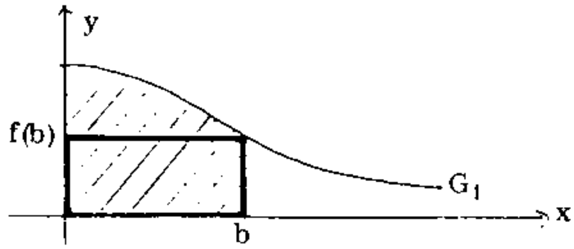
Abb. 2

2. a) $F'(x) = f_1(x)$ HDJ
$F'(x) > 0$ in $\mathbb{R}$, da $f_1(x) > 0$ in $\mathbb{R}$ (vgl. 1) => $F(x)$ streng monoton steigend in $\mathbb{R}$;
$f_1(x)$ achsensymmetrisch zur y-Achse (vgl. 1) und untere Grenze von $F(x)$ bei $x = 0$ (damit $F(0) = 0$) => punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) $f_1(x)$ besitzt genau einen Extremwert (Max(0|1)) => $F(x)$ besitzt genau einen Wendepunkt und zwar für denselben x-Wert => W(0|0).
Tangente: $m = F'(0) = f(0) = 1$ => $y = x$

c) $b \cdot f_1(b)$ entspricht der Rechtecksfläche (Länge b; Breite $f_1(b)$)

$F(b)$ entspricht der von den Koordinatenachsen, G_1 und $x = b$ eingeschlossenen Fläche



Da $f_1(x)$ in [0;b] streng monoton fällt (vgl. 1b), ist die durch $F(b)$ gegebene Fläche stets größer als die Rechtecksfläche.

$$\left.\begin{array}{ll} f_1(0) = 1 > F(0) = 0 & \\ f_1(1) < F(1) & (\text{wegen } F(b) > b \cdot f_1(b) \text{ für } b = 1) \\ f_1(x) \text{ in }]0;1[\text{ streng monoton fallend} & \\ F(x) \text{ in }]0;1[\text{ streng monoton steigend} & \end{array}\right\} \Rightarrow \text{genau ein Schnitt in }]0;1[$$

d) $F(x) = \int_0^x \frac{2e^t}{1 + e^{2t}}\, dt$ (*)

Berechnung des unbestimmten Integrals mit Hilfe der Substitution $z = e^t$ und damit $dz = e^t\, dt$.

$$\int \frac{2e^t}{1 + e^{2t}}\, dt = 2\int \frac{1}{1 + e^{2t}} \cdot e^t\, dt = 2\int \frac{1}{1 + z^2}\, dz = 2 \text{ arc tan } z + C =$$
$$= 2 \text{ arc tan } e^t + C$$

eingesetzt in (*)

$$F(x) = \int_0^x \frac{2et}{1 + e^{2t}}\, dt = [2 \text{ arc tan } e^t]_0^x = 2 \text{ arc tan } e^x - 2 \text{ arc tan } 1 =$$
$$= 2 \text{ arc tan } e^x - \frac{\pi}{2}$$

e) $$A = 2 \cdot \lim_{m \to \infty} \int_0^m f_1(t)\, dt = 2 \cdot \lim_{m \to \infty} F(m) = 2 \cdot \lim_{m \to \infty} (2 \text{ arc tan } e^m - \frac{\pi}{2}) =$$
$$= 2 \cdot (2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \pi$$

f) $2 \text{ arc tan } e^{x_0} - \frac{\pi}{2} = 1$

$\text{arc tan } e^{x_0} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

$e^{x_0} = \tan \frac{2 + \pi}{4}$

$x_0 = \ln \tan \frac{2 + \pi}{4}$

$x_0 \approx 1,23$

Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1989
Aufgabe III: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Beim Biathlon-Training wird zuerst gelaufen, dann nach bestimmten Regeln geschossen, und zwar in Serien von je 5 Schüssen (5-Serie).

1. Für jeden Sportler sei zunächst die Wahrscheinlichkeit p, bei einem Schuß einen Treffer zu erzielen, konstant. Die einzelnen Schüsse erfolgen unabhängig voneinander.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilnehmer mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}6$ in einer 5-Serie mehr als drei Treffer erzielt. Wie viele 5-Serien muß dieser Teilnehmer mindestens abgeben, um mit mindestens 90% Sicherheit bei wenigstens einer 5-Serie mehr als drei Treffer zu erzielen? 5 BE

   b) Nach wie vielen Schüssen könnte ein Beobachter die Trefferwahrscheinlichkeit eines Sportlers auf 0,01 genau mit einer Sicherheit von mindestens 80% abschätzen? Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschow. 5 BE

2. Ein Trainer möchte wissen, ob es sich lohnt, für den ersten Schuß der 5-Serie besonders viel Zeit zu verwenden, da er glaubt, daß nach einem Fehlschuß das Selbstvertrauen und damit die Trefferwahrscheinlichkeit p sinkt.

   a) Berechnen Sie zunächst für die konstante Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}9$ die Wahrscheinlichkeit p_1, daß bei den Schüssen 2 bis 5 mindestens ein Fehlschuß erfolgt. [Ergebnis: $p_1 = 0{,}3439$] 3 BE

   b) In den Trainingsprotokollen werden 300 5-Serien von Schützen mit $p = 0{,}9$ gesucht, bei denen der erste Schuß ein Fehlschuß war. Unter diesen 300 wird die Anzahl Z der Serien mit noch mindestens einem weiteren Fehlschuß gezählt.

   Für welche Werte von Z kann bei einem Signifikanzniveau von 5% die Hypothese H_0:="Die Trefferwahrscheinlichkeit nimmt nicht ab, wenn der erste Schuß ein Fehlschuß war" abgelehnt werden? Verwenden Sie die Normalverteilung. 12 BE

3. Beim Schießen soll nun der Sportler 5 Treffer erzielen, darf aber höchstens 7 Schüsse abgeben. Für die ersten 5 Schüsse braucht er insgesamt 100 Sekunden, für jeden weiteren Schuß 40 Sekunden wegen des Nachladens. Erreicht er keine 5 Treffer, so wird die gesamte Schießzeit (einschließlich einer Strafzeit) auf 300 Sekunden festgelegt.
   Die Zufallsgröße X gebe die gesamte Schießzeit in Sekunden an.

   a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert $E(X)$ dieser Zufallsgröße in Abhängigkeit von p. Berechnen Sie $E(X)$ für $p = 1;\ 0{,}9;\ 0{,}8$ in Sekunden.

   [Teilergebnis: $E(X) = 300 - 200p^5(14-22p+9p^2)$] 12 BE

   b) Vor dem Schießen muß jeder Sportler laufen. Erfahrungsgemäß sinkt bei allen die Trefferwahrscheinlichkeit p gleichmäßig um 0,01 pro 3 Sekunden Laufzeitgewinn.
   Ein Sportler möchte seine Laufzeit um 30 Sekunden verbessern. Kann er erwarten, daß er so seine Gesamtzeit für Laufen und Schießen verringert, wenn er sonst die Trefferwahrscheinlichkeit 0,9 hat?
   Begründen Sie Ihre Antwort. 3 BE

Lösung

1. a) $B(5;\ 0{,}6;\ k>3) = 1 - B(5;\ 0{,}6;\ k\leq 3) = 0{,}33696$

$B(n;\ 0{,}33696;\ k\geq 1) \geq 0{,}9$
$1 - 0{,}66304^n \geq 0{,}9$
$0{,}66304^n \leq 0{,}1$

$n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}66304}$; $n \geq 5{,}6$ => mindestens 6 Serien

b) $P(|H-p| \leq 0{,}01) > 1 - \frac{p\cdot q}{n\cdot 0{,}01^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\cdot 0{,}01^2}$

$1 - \frac{1}{4n\cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}8$

$\frac{1}{0{,}0004\ n} \leq 0{,}2$

$n \geq 12\,500$ => mindestens 12 500 Schüsse

2. a) $p_1 = B(4;\ 0{,}9;\ k\leq 3) = 0{,}34390$
Achtung: Schuß 1 bleibt unberücksichtigt!

b)

	für H_0 $0 \ldots c$	gegen H_0 $c+1 \ldots 300$
$p_0 = 0{,}9$ (const) => $p_1 = 0{,}34390$ Δ		$\leq 0{,}05$
$\bar{p}_0 < 0{,}9$ (nimmt ab) => $p_1 > 0{,}34390$		

$\mu = 300\cdot 0{,}34390 = 103{,}17$

$\sigma = \sqrt{300\cdot 0{,}34390\cdot 0{,}65610}$

$= 8{,}23$

$B(300;\ 0{,}34390;\ z>c) \leq 0{,}05$

$1 - \phi\left(\frac{c - 103{,}17 + 0{,}5}{8{,}23}\right) \leq 0{,}05$

$\phi\left(\frac{c - 103{,}17 + 0{,}5}{8{,}23}\right) \geq 0{,}95$

$\frac{c - 103{,}17 + 0{,}5}{8{,}23} \geq 1{,}6449$

$c \geq 116{,}2$

$B(300;\ 0{,}34390;\ z>117) \leq 0{,}05$

Für $Z \geq 118$ kann H_0 bei einem Signifikanzniveau von 5% abgelehnt werden.

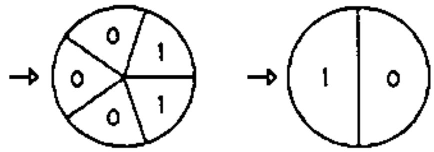
3. a) $P(X = 100;\ 5\ \text{Schuß}) = B(5;\ p;\ 5) = p^5$
$P(X = 140;\ 6\ \text{Schuß}) = B(5;\ p;\ 4)\cdot p = 5p^5q$
$P(X = 180;\ 7\ \text{Schuß}) = B(5;\ p;\ 3)\cdot p^2 + B(5;\ p;\ 4)\ q\ p = 15p^5q^2$
$P(X = 300) \qquad\qquad = 1 - (p^5 + 5p^5q + 15p^5q^2)$

$$\begin{aligned}E(X) &= 100p^5 + 700p^5q + 2700p^5q^2 + 300 - 300p^5 - 1500p^5q - 4500p^5q\\ &= 300 - 200p^5 - 800p^5q - 1800p^5q^2\\ &= 300 - 200p^5 - 800p^5(1-p) - 1800p^5(1-p)^2\\ &= 300 - 200p^5 - 800p^5 + 800p^6 - 1800p^5 + 3600p^6 - 1800p^7\\ &= 300 - 2800p^5 + 4400p^6 - 1800p^7 = 300 - 200p^5(14-22p+9p^2)\end{aligned}$$

$p = 1$: $E(X) = 100$ sec
$p = 0{,}9$: $E(X) \approx 124$ sec
$p = 0{,}8$: $E(X) \approx 158$ sec

b) Verbesserung der Laufzeit um 30 sec => Abnahme von p um 0,1 (0,9 -> 0,8)
$E_{0,8}(X) \approx 158$ sec $> E_{0,9}(X) + 30$ sec ≈ 154 sec
Sportler kann keine Verringerung der Gesamtzeit erwarten.

Bei zwei Glücksrädern mit jeweils gleich großen Sektoren wird nach Stillstand des Rades durch den Pfeil angezeigt, ob man einen Treffer (1) oder eine Niete (0) hat (siehe nebenstehende Abbildung)



I II

1. Mit dem Glücksrad I wird 10mal gespielt.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mehr Treffer als Nieten? — 2 BE

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man beim 10. Spiel den 4. Treffer? — 3 BE

2. a) Wie oft müßte man mit dem Glücksrad I mindestens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die relative Häufigkeit für einen Treffer im Intervall [0,38; 0,42] liegt, mindestens 97% ist?
   Verwenden Sie die Tschebyschow-Ungleichung! — 4 BE

   b) Es wird nun mit zwei (voneinander unabhängigen) Glücksrädern vom Typ I gleichzeitig gespielt. Wie oft müßte man das mindestens tun, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% wenigstens ein Doppeltreffer auftritt? — 5 BE

3. Das Glücksrad I wird nun so lange betätigt, bis man einen Treffer erhält, höchstens jedoch viermal. Die Anzahl der Spiele wird durch die Zufallsgröße X angegeben.
   Berechnen Sie Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert und Varianz dieser Zufallsgröße. — 7 BE

4. Am Glücksrad I und am Glücksrad II werde je viermal unabhängig voneinander gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Glücksrad I mehr Treffer erzielt werden als am Glücksrad II? — 10 BE

5. Die Ergebnisse von jeweils 500 Spielen mit dem Glücksrad I bzw. mit dem Glücksrad II wurden in Protokollen festgehalten. Dabei wurde die Angabe des Glücksrades vergessen; deshalb werden alle Protokolle mit höchstens k Treffern dem Glücksrad I, die anderen dem Glücksrad II zugeordnet.

   a) Bestimmen Sie k so, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Protokoll fälschlich dem Glücksrad I zuzuschreiben, unter 1% liegt, und gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Protokoll fälschlich dem Glücksrad II zuzuweisen, möglichst klein wird. Verwenden Sie die Normalverteilung. — 6 BE

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei Verwendung der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a ein Protokoll irrtümlich dem Glücksrad II zugeordnet? Verwenden Sie die Normalverteilung. — 3 BE

Lösung

1. a) $P = B(10;\ 0{,}4;\ k>5) = 1 - B(10;\ 0{,}4;\ k\le 5) = 1 - 0{,}83376 = 0{,}16624$

   b) $P = B(9;\ 0{,}4;\ k=3)\cdot 0{,}4 = 0{,}25082\cdot 0{,}4 = 0{,}100328$

2. a) $[0{,}38;\ 0{,}42] = [0{,}40 - 0{,}02;\ 0{,}40 + 0{,}02]$ mit $p = 0{,}4$

   $P(|H-0{,}4| \le 0{,}02) > 1 - \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{n\cdot 0{,}02^2}$

   $1 - \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{n\cdot 0{,}02^2} \ge 0{,}97$

   $\frac{0{,}24}{0{,}0004\ n} \le 0{,}03$

   $n \ge 20\ 000 \Rightarrow$ mindestens 20 000 Spiele

   b) $B(n;\ 0{,}4^2;\ k\ge 1) > 0{,}98$

   $1 - (1 - 0{,}4^2)^n > 0{,}98$

   $0{,}84^n < 0{,}02$

   $n > \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}84}$

   $n > 22{,}4 \Rightarrow$ mindestens 23 Spiele

3. $P(1) = 0{,}4$
   $P(2) = 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}24$
   $P(3) = 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}144$
   $P(4) = 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 + 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6 = 0{,}6^3 = 0{,}216$

   $E(X) = 0{,}4\cdot 1 + 0{,}24\cdot 2 + 0{,}144\cdot 3 + 0{,}216\cdot 4 = 2{,}176$
   $VAR(X) = 0{,}4\cdot 1 + 0{,}24\cdot 4 + 0{,}144\cdot 9 + 0{,}216\cdot 16 - 2{,}176^2 = 1{,}377024$

4.

II \ I	0	1	2	3	4
0		x	x	x	x
1			x	x	x
2				x	x
3					x
4					

$$\begin{aligned} P = &\ B(4;\ 0{,}5;\ 0)\cdot B(4;\ 0{,}4;\ k\ge 1)\\ &+ B(4;\ 0{,}5;\ 1)\cdot B(4;\ 0{,}4;\ k\ge 2)\\ &+ B(4;\ 0{,}5;\ 2)\cdot B(4;\ 0{,}4;\ k\ge 3)\\ &+ B(4;\ 0{,}5;\ 3)\cdot B(4;\ 0{,}4;\ k=4)\\ = &\ 0{,}8704\cdot 0{,}0625 + 0{,}5248\cdot 0{,}2500 +\\ &+ 0{,}1792\cdot 0{,}3750 + 0{,}0256\cdot 0{,}2500 = 0{,}2592 \end{aligned}$$

5. a)

	zu I 0 ... c	zu II c+1 ... 500
$p_I = 0{,}4$		
$p_{II} = 0{,}5$	< 0,01	

I: $\mu = 500\cdot 0{,}4 = 200$

$\sigma = \sqrt{500\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6} = \sqrt{120}$

II: $\mu = 500\cdot 0{,}5 = 250$

$\sigma = \sqrt{500\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5} = \sqrt{125}$

$B(500;\ 0{,}5;\ k\le c) < 0{,}01$

$\phi\left(\frac{c - 250 + 0{,}5}{\sqrt{125}}\right) < 0{,}01$

$\frac{c - 250 + 0{,}5}{\sqrt{125}} < -2{,}3264$

$c < 223{,}5 \Rightarrow c = 223$

[0 ... 223] zu I
[224 ... 500] zu II

b) $B(500;\ 0{,}4;\ k\ge 224) \approx 1 - \phi\left(\frac{223 - 200 + 0{,}5}{\sqrt{120}}\right) = 1 - \phi(2{,}15) = 0{,}01578$

Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1989
Aufgabe V: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem K sind die Ebene E: $x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 = 0$

sowie der Punkt A(4|9,5|8) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9,5 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

1. a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E und den Fußpunkt A_0 des Lots von A auf E. [Teilergebnis: S(2|1,5|2)] 5 BE

   b) Die Gerade h sei die senkrechte Projektion von g auf E. Geben Sie eine Gleichung von h an.
   [Mögliches Ergebnis: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$] 3 BE

   c) Weisen Sie nach, daß die Gerade k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tau \in \mathbb{R}$,

   in der Ebene E liegt, senkrecht auf h steht und den in Teilaufgabe 1a bestimmten Punkt S enthält. 3 BE

   d) Legen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen zwischen E, g, h und k hervorgehen. Die Zeichnung ist im folgenden entsprechend zu ergänzen. 2 BE

2. In der Ebene E wird nun ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem K'eingeführt mit dem Punkt S(2|1,5|2) als Ursprung und auf den Betrag 1 normierten Richtungsvektoren von h bzw. k als erstem bzw. zweitem Basisvektor.

   a) Geben Sie die Koordinaten q_1', q_2' des in E liegenden Punktes Q(2|0,5|4) in Q(2|0,5|4) dem neuen System K'an.
   [Mögliches Ergebnis: $q_1' = \sqrt{2}$, $q_2' = \sqrt{3}$] 8 BE

   b) Berechnen Sie unter Verwendung von Vektoren aus K' den Winkel φ, den die Geraden h und SQ bilden. 5 BE

   c) Die Parallele zu h durch Q sei p. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, daß der Abstand der windschiefen Geraden p und g gleich $\sqrt{3}$ ist. 4 BE

Lösung

1. a) g ∩ E: $(4+\lambda) + 2(9,5+4\lambda) + (8+3\lambda) - 7 = 0$
$12\lambda + 24 = 0 \qquad \lambda = -2$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9,5 \\ 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9,5 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

l ∩ E: $(4+\mu) + 2(9,5+2\mu) + (8+\mu) - 7 = 0$
$6\mu + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -4$

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9,5 \\ 8 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Da $\{S\} = g \cap E$ und $A \in g$, muß h durch S und A_0 verlaufen.

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 & - & 2 \\ 1,5 & - & 1,5 \\ 4 & - & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) $k \subset E$, wenn Richtungsvektor von k senkrecht zum Normalenvektor von E:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$k \perp h: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

$$S \in k: \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d)

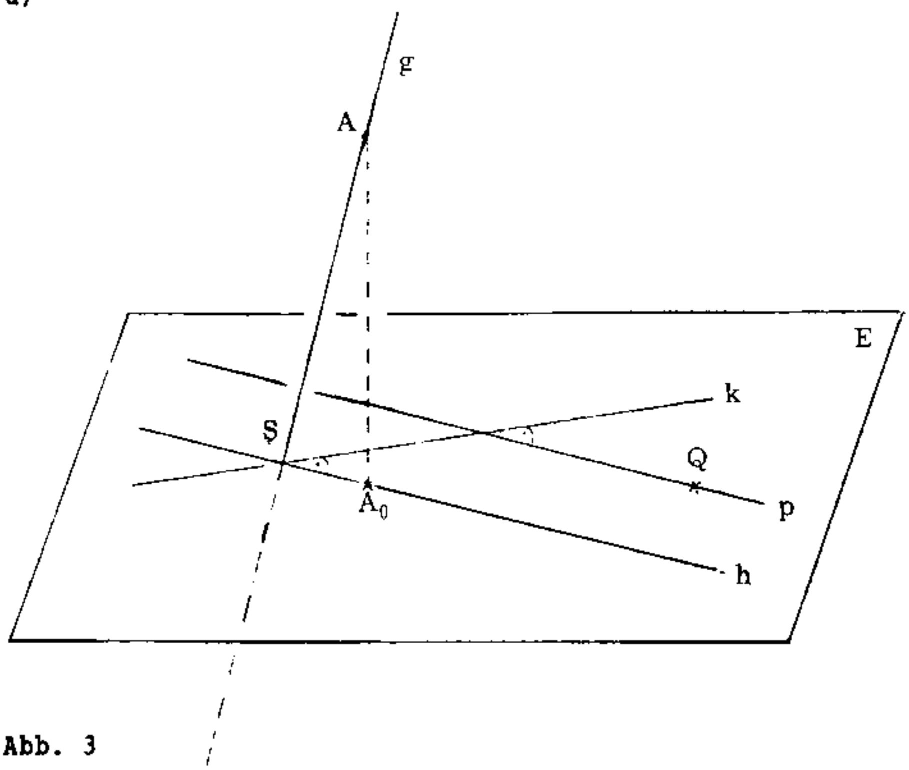


Abb. 3

2. a) 1. Basisvektor: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2. Basisvektor: $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{q_1'}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{q_2'}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \text{I.} \quad 2 = 2 - \dfrac{q_1'}{\sqrt{2}} + \dfrac{q_2'}{\sqrt{3}} \\ \qquad \text{II.} \quad 0,5 = 1,5 - \dfrac{q_2'}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad q_2' = \sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{q_1'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad q_1' = \sqrt{2}$$

$$\text{III.} \quad 4 = 2 + \frac{q_1'}{\sqrt{2}} + \frac{q_2'}{\sqrt{3}} \qquad \text{Probe in III:} \quad 4 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \text{erfüllt}$$

b) $\overrightarrow{u_h} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (Basisvektoren!)

$\overrightarrow{SQ} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ (vgl. 2a)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = 50{,}8°$$

c) Wegen $p \parallel h$ (im Abstand $q_2' = \sqrt{3}$) und $h \perp k$ gilt $p \perp k$; wegen 1b (h ist senkrechte Projektion von g auf E) und $h \perp k$ gilt $g \perp k$, somit ist k gemeinsames Lot von g und p und $d(p;g) = d(p;h) = \sqrt{3}$.

Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1989
Aufgabe VI: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4|-4|4)$, $B(2|4|-2)$ und $C_a(2a-3|5a|6a+3)$, $a \in \mathbb{R}$, gegeben.

1. a) Das Dreieck ABC_0 bestimmt eine Ebene E_0.
Stellen Sie eine Gleichung von E_0 in Normalenform auf.
[Mögliches Ergebnis: $2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 12 = 0$] 5 BE

b) Bestätigen Sie, daß gilt: $\gamma_0 = \sphericalangle AC_0B \approx 77{,}8°$. 4 BE

c) Wenn a alle Werte aus $\mathbb{R}$ durchläuft, bewegt sich C_a auf einer Geraden g. Stellen Sie eine Gleichung von g auf, und beweisen Sie, daß g auf E_0 senkrecht steht. 3 BE

2. a) Zeigen Sie, daß alle Dreiecke ABC_a gleichschenklig sind. 5 BE

b) Der Mittelpunkt der Strecke [AB] sei S. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, daß C_0S das gemeinsame Lot von g und AB darstellt. 4 BE

3. a) Welchen Abstand d_a hat C_a von E_0? Bestimmen Sie den Spiegelpunkt von C_a bezüglich E_0. 4 BE

b) Entscheiden Sie ohne weitere Rechnung, ob es Werte von a gibt, für die das Dreieck ABC_a rechtwinklig ist, und solche, für die das Dreieck ABC_a gleichseitig ist. Wie viele sind es gegebenenfalls jeweils? 5 BE

Lösung

1. a) $C_0(-3|0|3)$

$E_0: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2-4\\4+4\\-2-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3-4\\0+4\\3-4\end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-7\\4\\-1\end{pmatrix}$

Bestimmung des Normalenvektors:

entweder $-2n_1 + 8n_2 - 6n_3 = 0$ $\quad -7n_1 + 4n_2 - n_3 = 0$

$n_1 = 4n_2 - 3n_3$ eingesetzt $\quad -28n_2 + 21n_3 + 4n_2 - n_3 = 0$

$\Rightarrow -6n_2 + 5n_3 = 0$

frei gewählt $n_3 = 6 \Rightarrow n_2 = 5 \Rightarrow n_1 = 2$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$

oder $\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-7\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8+24\\42-2\\-8+56\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\40\\48\end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$

$E_0: \begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix} \circ (\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}) = 0$,

$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 12 = 0$

b) $\cos\gamma_0 = \dfrac{\overrightarrow{C_0A} \circ \overrightarrow{C_0B}}{|\overrightarrow{C_0A}| \cdot |\overrightarrow{C_0B}|} = \dfrac{\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\4\\-5\end{pmatrix}}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{66}} = \dfrac{35-16-5}{66} = \dfrac{7}{33} \Rightarrow \gamma_0 \approx 77{,}8°$

Achtung: Scheitel in C_0; ohne Betragsstriche, da Dreieckswinkel, nicht Winkel zwischen Geraden

c) $C_a = \begin{pmatrix}2a-3\\5a\\6a+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$ Gerade durch C_0 mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$

da der Richtungsvektor der Geraden gleich dem Normalenvektor der Ebene ist, gilt $g \perp E_0$

2. a) $\overline{AB} = \left|\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{104}$

$\overline{AC_a} = \left|\begin{pmatrix}2a-7\\5a+4\\6a-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4a^2-28a+49+25a^2+40a+16+36a^2-12a+1} = \sqrt{65a^2+66}$

$\overline{BC_a} = \left|\begin{pmatrix}2a-5\\5a-4\\6a+5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4a^2-20a+25+25a^2-40a+16+36a^2+60a+25} = \sqrt{65a^2+66}$

$\overline{AC_a} = \overline{BC_a}$ für alle $a \in \mathbb{R}$

b) $C_0S \perp AB$, da im gleichschenkligen Dreieck die Höhe auf die Basis diese halbiert

$C_0S \perp g$, da C_0S in E_0 liegt und $g \perp E_0$ (vgl. 1c)

$\Rightarrow$ C_0S gemeinsames Lot von g und AB

3. a) E_0 in HNF: $\frac{1}{\sqrt{65}}(2x_1+5x_2+6x_3-12) = 0$

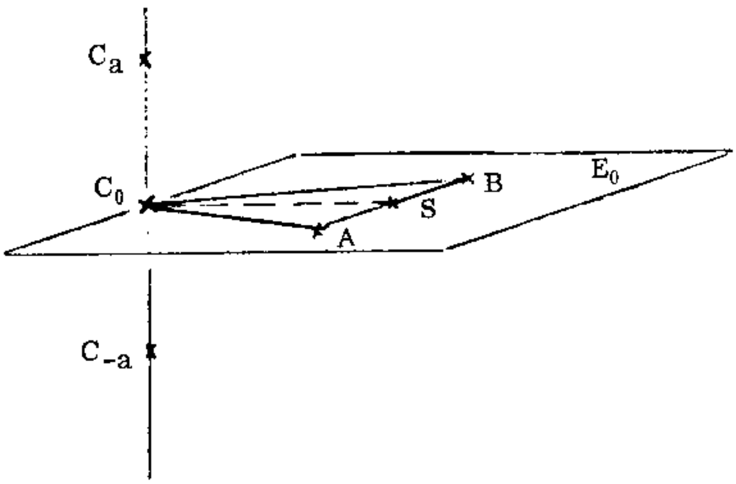
$$d_{C_a} = \frac{1}{\sqrt{65}}(4a-6+25a+36a+18-12) = \frac{1}{\sqrt{65}}\cdot 65a = a\sqrt{65}$$

C_a liegt für $a > 0$ auf der dem Ursprung abgewandten Seite von E_0
für $a < 0$ auf der Seite des Ursprungs

$$\overrightarrow{C_a^*} = \overrightarrow{C_a} - 2d\cdot n^0_{E_0} = \begin{pmatrix}2a-3\\5a\\6a+3\end{pmatrix} - 2a\sqrt{65}\cdot\frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-3\\5a\\6a+3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4a\\-10a\\-12a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2a-3\\-5a\\-6a+3\end{pmatrix} = \overrightarrow{C_{-a}}$$

oder anschaulich: $C_0 \in E_0$ mit $a = 0$ und $g \perp E_0$
$\Rightarrow$ Spiegelpunkt zu C_a ist C_{-a}

$C_0 \in E_0$ mit $a = 0$ und $g \perp E_0$
$\Rightarrow$ $d_{C_a} = \overline{C_0C_a} = a\cdot |n^0| = a\sqrt{65}$



b) $\gamma_0 \approx 77{,}8°$ (vgl. 1b)

je weiter C_a von C_0 entfernt ist, desto kleiner wird γ_a
$\Rightarrow$ rechtwinklig nicht möglich ($\gamma_a \le 77{,}8°$)
gleichseitig zweimal möglich ($\gamma_a = 60°$, wenn $\sqrt{65a^2+66} = \sqrt{104}$;
vgl. 2a)