Leistungskurs Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 1990
Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $f\colon x \longmapsto \begin{cases} 4\cdot(1-x)\cdot e^{x-1} & \text{für } x \le 1 \\ -\dfrac{4\cdot \ln x}{x} & \text{für } x > 1. \end{cases}$

Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion f an, und bestimmen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \longrightarrow \pm\infty$. **3 BE**

   b) Ermitteln Sie die 1. Ableitung von f. Untersuchen Sie insbesondere, ob diese Ableitung auch an der Stelle $x = 1$ existiert.

   [Teilergebnis: $f'\colon x \longmapsto \begin{cases} -4x\cdot e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 4x^{-2}\cdot(\ln x - 1) & \text{für } x > 1 \end{cases}$]

   Berechnen Sie die 2. Ableitung von f für $x \neq 1$, und bestimmen Sie den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert der 2. Ableitung an der Stelle $x = 1$. **11 BE**

   c) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte sowie die Wendepunkte des Graphen G_f. Prüfen Sie, ob für $x = 1$ ein Wendepunkt vorliegt. **9 BE**

   d) Zeichnen Sie den Graphen G_f für $-3 \le x \le 5$ unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Querformat; Längeneinheit 2 cm). Tragen Sie auch die Tangente bei $x = 1$ ein. **7 BE**

2. Nun wird die Funktion $g\colon x \longmapsto \int_1^x f(t)\,dt$ mit $D_g = \mathbb{R}$ betrachtet.

   a) Zeigen Sie ohne Ausführung der Integration, daß g genau eine Nullstelle hat, und bestimmen Sie die Abszissen der Extrem- und der Wendepunkte sowie die Art der Extrempunkte des Graphen G_g von g. Begründen Sie Ihre Antworten. **7 BE**

   b) Ermitteln Sie für $x \le 1$ eine integralfreie Darstellung von $g(x)$. **6 BE**

   c) Geben Sie den Inhalt A des Flächenstücks an, das für $x \le 1$ vom Graphen G_f und der x-Achse begrenzt wird. **3 BE**

   d) Für $x \ge e$ gilt: $f(x) \le -\dfrac{4}{x}$. Begründen Sie damit, daß das für $x \ge 1$ vom Graphen G_f und der x-Achse begrenzte Flächenstück keinen endlichen Inhalt hat. **4 BE**

Lösung

1. a) $4\cdot(1-x)e^{x-1} = 0 \qquad x = 1 \qquad \in D_1 =]-\infty; 1]$

$-\dfrac{4\ \ln 4}{x} = 0 \qquad x = 1 \qquad \notin D_2 =]1; +\infty[$

Nullstelle (1/0)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4\ \ln x}{x}\right) \overset{\text{l.H.}}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4\cdot\frac{1}{x}}{1}\right) = 0^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 4(1-x)e^{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4(1-x)}{e^{1-x}} \overset{\text{l.H.}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{-e^{1-x}} = 0^+$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 4(-1)e^{x-1} + 4(1-x)e^{x-1} = -4xe^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ -\dfrac{4\cdot\frac{1}{x}\cdot x - 4\ \ln x\cdot 1}{x^2} = \dfrac{4(\ln x - 1)}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f'(x) = -4\cdot e^0 = -4 \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f'(x) = \dfrac{4(\ln 1 - 1)}{1} = -4 \end{array}\right\} f'(1) = -4$$

$$f''(x) = \begin{cases} -4e^{x-1} - 4xe^{x-1} = -4(x+1)e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ \dfrac{4\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2 - 4(\ln x - 1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{4(3 - 2\ \ln x)}{x^3} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f''(x) = -4\cdot 2\cdot e^0 = -8$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f''(x) = \frac{4(3 - 2\ \ln 1)}{1} = 12$$

c) Extremwerte $\quad f'(x) = 0 \qquad x = 0 \quad \text{in } D_1 \qquad f''(0) = -4e^{-1} < 0$

$x = e \quad \text{in } D_2 \qquad f''(e) = \dfrac{4(3-2)}{e^3} > 0$

Max $(0/\frac{4}{e})$ $\qquad$ Min $(e/-\frac{4}{e})$

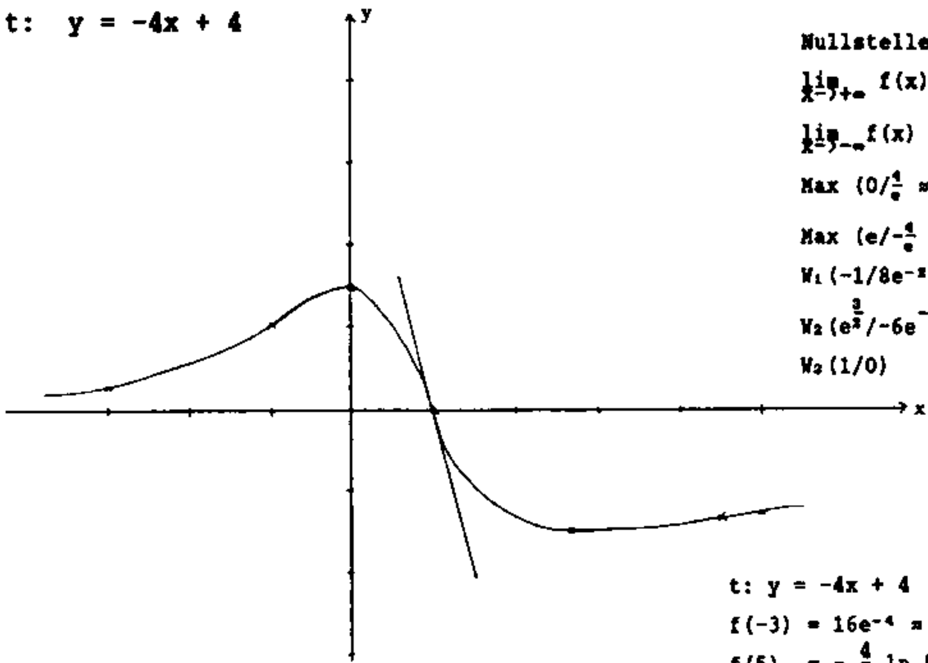
Wendepunkte $\quad f''(x) = 0 \qquad x = -1 \quad \text{in } D_1 \qquad f''(x)$ wechselt Vorzeichen

$x = e^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } D_2 \qquad f''(x)$ wechselt Vorzeichen

$W_1(-1/8e^{-2}) \qquad W_2(e^{\frac{3}{2}}/-6e^{-\frac{3}{2}})$

weiterer Wendepunkt für (1/0), da $f'(1)$ existiert und $f'(x)$ für $x = 1$ ein Minimum besitzt.

d) t: $y = -4x + 4$



Nullstelle (1/0)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$

Max $(0/\frac{4}{e} \approx 1{,}47)$

Max $(e/-\frac{4}{e} \approx -1{,}47)$

$W_1(-1/8e^{-2} \approx 1{,}08)$

$W_2(e^{\frac{3}{2}}/-6e^{-\frac{3}{2}} \approx -1{,}34)$

$W_2(1/0)$

t: $y = -4x + 4$

$f(-3) = 16e^{-4} \approx 0{,}29$

$f(5) = -\frac{4}{5} \ln 5 \approx -1{,}29$

2. a) $g(1) = 0$, da obere Integrationsgrenze = untere Integrationsgrenze

$x = 1$ ist einzige Nullstelle, da

$$g(x) \begin{cases} \text{streng monoton steigend} & \text{für } x < 1 \\ \text{streng monoton fallend} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

wegen

$$g'(x) = f(x) = \begin{cases} 4(1-x)e^{x-1} > 0 & \text{für } x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \\ -\dfrac{4 \ln x}{x} < 0 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Aus $g'(x) = f(x)$ und $g''(x) = f'(x)$ und $g'''(x) = f''(x)$ folgt

Max $(1/0)$ $[g'(1) = f(1) = 0\,; \quad g''(1) = f'(1) = -4 < 0]$

W_1: $x_1 = 0$ $[g''(0) = f'(0) = 0\,; \quad g'''(0) = f''(0) = -4e^{-1}]$

W_2: $x_2 = e$ $[g''(e) = f'(e) = 0\,; \quad g'''(e) = f''(e) = \frac{4}{e^3}]$

b) $$g(x) = \int_1^x 4(1-t)e^{t-1}\,dt = \int_x^1 4(t-1)e^{t-1}\,dt = [4(t-2)e^{t-1}]_x^1 =$$

$$= -4e^0 - 4(x-2)e^{x-1} = 4(2-x)e^{x-1} - 4$$

NR: $\int 4(t-1)e^{t-1}\,dt = 4[(t-1)e^{t-1} - \int e^{t-1}\,dt] = 4(t-1)e^{t-1} - e^{t-1}$
$= 4(t-2)e^{t-1}$

partielle Integration mit

$u = t - 1 \qquad v = e^{t-1}$

$u' = 1 \qquad v' = e^{t-1}$

c) $$A = \left|\lim_{x \to -\infty} g(x)\right| = \left|\lim_{x \to -\infty} [4(2-x)e^{x-1} - 4]\right| = \left|\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{4(2-x)}{e^{1-x}} - 4\right]\right|$$

$$\overset{\text{l.H.}}{=} \left|\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{-4}{-e^{1-x}} - 4\right]\right| = |0 - 4| = 4$$

d) $$g(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^e f(t)\,dt + \int_e^x f(t)\,dt \le \int_1^e f(t)\,dt + \int_e^x \left(-\frac{4}{t}\right) dt$$

$$= \int_1^e f(t)\,dt + [-4 \ln t]_e^x = \int_1^e f(t)\,dt - 4 \ln x + 4$$

$$A = \left|\lim_{x \to \infty} g(x)\right| = \left|\lim_{x \to \infty} \left[\int_1^e f(t)\,dt - 4 \ln x + 4\right]\right| = |\text{"}a - \infty + 4\text{"}| = \infty$$

Gegeben ist die Funktionenschar f_a: $x \longmapsto f_a(x) = \arctan\left(1-\frac{2}{ax}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.
Der Graph der Funktion f_a wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_{f_a} und die Nullstellen der Scharfunktionen f_a. Untersuchen Sie das Verhalten der Scharfunktionen, wenn x gegen die Grenzen von D_{f_a} strebt. 5 BE

   b) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, die Extrempunkte und die Wendepunkte der Graphen G_{f_a} in Abhängigkeit von a. Stellen Sie eine Gleichung für die Schar der Wendetangenten t_a auf. 8 BE
   [Zur Kontrolle: $f_a' = \frac{a}{a^2x^2 - 2ax + 2}$]

   c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen f_a. 3 BE

   d) Die Tangenten an die Graphen streben bei links- bzw. rechtsseitiger Annäherung an die Definitionslücke bestimmten Grenzlagen zu. Geben Sie die entsprechenden Geradengleichungen an. 3 BE

   e) Berechnen Sie die Funktionswerte $f_5(-2)$ und $f_5(2)$. Zeichnen Sie im Bereich $-2 \le x \le 2$ den Graphen G_{f_5} unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Querformat; Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte; Längeneinheit 5 cm). 6 BE

2. Nun werden die Funktionen

$$g_a: x \longmapsto \int_{\frac{2}{a}}^{x} \frac{a}{(at-1)^2 + 1}\,dt\ , \quad x \ge 0\ , \quad a \in \mathbb{R}^+$$

   betrachtet.

   a) Berechnen Sie eine integralfreie Darstellung von $g_a(x)$ mit Hilfe der Substitutionsmethode. 5 BE
   [Ergebnis: $g_a(x) = \arctan(ax-1) - \frac{\pi}{4}$]

   b) Zeigen Sie, daß g_a und f_a in $\mathbb{R}^+$ übereinstimmen. 5 BE

   c) Begründen Sie, daß g_a umkehrbar ist. Berechnen Sie den Term $g_a^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion von g_a, und zeichnen Sie den Graphen von g_5^{-1} in das bereits angelegte Koordinatensystem. 8 BE

3. Berechnen Sie den Inhalt des im 4. Quadranten liegenden Flächenstücks, das von den Koordinatenachsen und dem Graphen G_{f_a} begrenzt wird.
   Hinweis: Verwenden Sie die in Teilaufgabe 2 erkannten Zusammenhänge. 7 BE

Lösung

1. a) $D_{f_a} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f_a(x) = 0$, wenn $1 - \dfrac{2}{ax} = 0$

$$1 = \frac{2}{ax}$$

$$x = \frac{2}{a} \qquad \text{Nst: } \left(\frac{2}{a}\middle|0\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(1 - \underbrace{\frac{2}{ax}}_{\to 0}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f_a(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \arctan\left(1 - \underbrace{\frac{2}{ax}}_{\to +\infty}\right) = \text{"}\arctan(-\infty)\text{"} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f_a(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \arctan\left(1 - \underbrace{\frac{2}{ax}}_{\to -\infty}\right) = \text{"}\arctan(+\infty)\text{"} = +\frac{\pi}{2}$$

b) $$f_a'(x) = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{2}{ax}\right)^2}\cdot\left(\frac{2}{ax^2}\right) = \frac{2}{\left(1 + 1 - \frac{4}{ax} + \frac{4}{a^2x^2}\right)\cdot ax^2} =$$

$$= \frac{2}{2ax^2 - 4x + \frac{4}{a}} = \frac{2a}{2a^2x^2 - 4ax + 4} = \frac{a}{a^2x^2 - 2ax + 2}$$

$$f_a''(x) = \frac{-a(2a^2x - 2a)}{(a^2x^2 - 2ax + 2)^2} = \frac{-2a^2(ax - 1)}{(a^2x^2 - 2ax + 2)^2}$$

Extrempunkte nicht vorhanden, da $f_a'(x) \neq 0$

Wendepunkt bei $x = \frac{1}{a}$, da $f_a''\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ und $f_a''(x) > 0$ für $x < \frac{1}{a}$

$f_a''(x) < 0$ für $x > \frac{1}{a}$

$W\left(\frac{1}{a}; -\frac{\pi}{4}\right)$

$$f_a'\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{1 - 2 + 2} = a$$

Wendetangente: $y = ax - 1 - \frac{\pi}{4}$

c) $f_a'(x) >$ in D_{f_a}, da $a > 0$ und $a^2x^2 - 2ax + 2 > 0$ wegen

$$a^2x^2 - 2ax + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4a^2 - 8a^2}}{2a^2} \qquad \text{keine Lösung}$$

$y = a^2x^2 - 2ax + 2$ ist also Gleichung einer nach oben geöffneten Parabel ohne Nullstellen

somit: $f_a(x)$ ist streng monoton steigend in $\mathbb{R}^-$ und $\mathbb{R}^+$

d) $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f_a'(x) = \frac{a}{2}$

$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f_a'(x) = \frac{a}{2}$

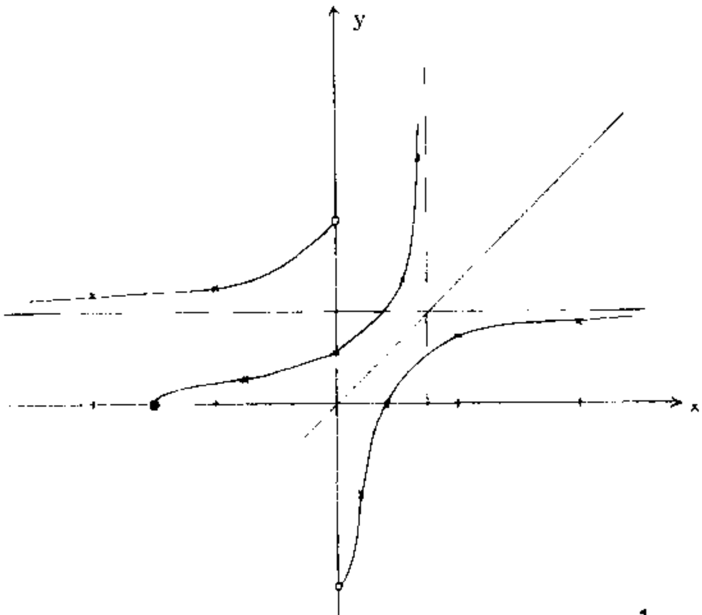
mit den Grenzwerten von a) =>

t_{0+}: $y = \frac{a}{2}x - \frac{\pi}{2}$

t_{0-}: $y = \frac{a}{2}x + \frac{\pi}{2}$

e) $$f_5(-2) = \arctan\left(1 - \frac{2}{-10}\right) = \arctan\frac{6}{5} \approx 0{,}88$$

$$f_5(2) = \arctan\left(1 - \frac{2}{10}\right) = \arctan\frac{4}{5} \approx 0{,}67$$



Nullstelle $\left(\frac{2}{5}/0\right)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_5(x) = \frac{\pi}{4}$

$W \left(\frac{1}{5}; -\frac{\pi}{4}\right)$

$t: y = 5x - 1 - \frac{\pi}{4}$

$f_5(-2) \approx 0{,}88$

$f_5(2) \approx 0{,}67$

2\. a) $u = at - 1 \qquad du = a\,dt \qquad dt = \frac{1}{a}\,du$

$$\int \frac{a}{(at-1)^2 + 1}\,dt = \int \frac{a}{u^2 + 1}\cdot\frac{1}{a}\,du = \int \frac{1}{u^2 + 1}\,du = \arctan u =$$
$$= \arctan(at-1)$$

$$g_a(x) = \int_{\frac{2}{a}}^{x} \frac{a}{(at-1)^2 + 1}\,dt = [\arctan(at-1)]_{\frac{2}{a}}^{x} =$$
$$= \arctan(ax-1) - \arctan 1 = \arctan(ax-1) - \frac{\pi}{4} \qquad x \in \mathbb{R}_0^+$$

b) $g_a'(x) = \frac{a}{(ax-1)^2 + 1} = \frac{a}{a^2x^2 - 2ax + 2} = f_a'(x)$

$f_a\left(\frac{2}{a}\right) = 0 \qquad g_a\left(\frac{2}{a}\right) = \arctan 1 - \frac{\pi}{4} = 0$

$\Rightarrow g_a(x) = f_a(x) \quad$ in $\mathbb{R}^+$

c) $g_a'(x) > 0$ in $\mathbb{R}^+ \Rightarrow$ streng monoton steigend $\Rightarrow$ umkehrbar

$y = \arctan(ax-1) - \frac{\pi}{4}$

$y + \frac{\pi}{4} = \arctan(ax-1)$

$\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = ax - 1$

$\frac{1}{a}\left[\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right] = x \qquad g_a^{-1}(x) = \frac{1}{a}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{a}$

3\. $A = \lim\limits_{M \to 0}\left[-\int_M^{\frac{2}{a}} f_a(x)\,dx\right] = -\int_0^{\frac{2}{a}} g_a(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} g_a^{-1}(x)\,dx =$

Hinweis: $D_{g_a} = \mathbb{R}_0^+$!

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{1}{a}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{a}\right)dx \underset{F.S.!}{=} \left[\frac{1}{a}\left(-\ln\left|\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) + \frac{x}{a}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$
$$= \frac{1}{a}\left[-\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right] - \frac{1}{a}\left[-\ln\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] + \frac{\pi}{2a} =$$
$$= -\frac{1}{a}\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{a}\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{2a}$$

Leistungskurs Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 1990
Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik III

Ein Glücksspielautomat liefert Lose, auf denen jeweils eine siebenstellige Zahl aufgedruckt ist. Diese siebenstellige Zahl besteht nur aus den Ziffern 1 und 2. Die Ziffer 1 wird dabei mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 und die Ziffer 2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 erzeugt.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   E_1:="Die aufgedruckte Zahl beginnt mit 222";
   E_2:="Auf den ersten vier Stellen kommt die Ziffer 2 genau zweimal vor";
   E_3:="Die aufgedruckte Zahl ist kleiner als 1112111". 5 BE

2. Ein Spiel beginnt mit dem Kauf eines Loses. 1 Los kostet 1 DM.
   Die Zufallsgröße A sei Auszahlung für ein Los. Es gilt folgender Auszahlungsplanplan:

Anzahl k der Ziffern 2	k<4	4	5	6	7
Auszahlung in DM	0	3	10	40	100

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße A (auf 5 Dezimalstellen gerundet), ihren Erwartungswert und ihre Varianz. 6 BE
   b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße G = Gewinn = Auszahlung - Einsatz. 2 BE
   c) Nach wie vielen Spielen unterscheidet sich das arithmetische Mittel der Gewinne eines Spielers mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% um weniger als 0,5 DM vom Erwartungswert E(G). Verwenden Sie die Tschebyschow-Ungleichung. 7 BE

3. Der Besitzer des Automaten vermutet, daß der Anteil der Gewinnlose mit der Auszahlung 10 DM größer ist als 2,5%. Zur Überprüfung zieht er 1000 Lose und bestimmt die Anzahl Z der 9 DM-Gewinne. Dann testet er die Nullhypothese "P(A=10)=0,025" gegen die Alternative "P(A=10)>0,025". Wie lautet die Entscheidungsregel, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art höchstens 5% betragen soll?
   Verwenden Sie die Poissonverteilung. 8 BE

4. Um das Spiel attraktiver zu gestalten, erhält der Spieler eine zusätzliche Chance:
   Zieht er kein Gewinnlos (also kein Los mit positivem Gewinn), ist aber unter den ersten vier Stellen genau zweimal die Ziffer 2, so darf er ohne weiteren Einsatz dem Glücksspielautomaten ein weiteres Los, Freilos genannt, entnehmen.
   Bei einem Spiel dürfen höchstens zwei Freilose gezogen werden.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit darf der Spieler mindestens ein Freilos entnehmen? 4 BE
   b) Ein Spieler erzielt einen Haupttreffer von 100 DM. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geschieht dies durch mindestens ein Freilos? 8 BE

Lösung

1. $P(E_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}3^3 = 0{,}027$

   $P(E_2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}2646$

   $P(E_3) = P(1111\ldots) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}7^4 = 0{,}2401$

2. a)

Anzahl k der Ziffern 2	k < 4	4	5	6	7
Auszahlung A in DM	0	3	10	40	100
Wahrscheinlichkeit	$\sum_0^3 B(7;0,3;i)$ $= 0{,}87396$	$B(7;0,3;4)$ $= 0{,}09724$	$B(7;0,3;5)$ $= 0{,}02500$	$B(7;0,3;6)$ $= 0{,}00357$	$B(7;0,3;7)$ $= 0{,}00022$

$E(A) = 0 \cdot 0{,}87396 + 3 \cdot 0{,}09724 + 10 \cdot 0{,}02500 + 40 \cdot 0{,}00357 + 100 \cdot 0{,}00022$
$= 0{,}70652$

$Var(A) = 0^2 \cdot 0{,}87396 + 3^2 \cdot 0{,}09724 + 10^2 \cdot 0{,}02500 + 40^2 \cdot 0{,}00357 +$
$+ 100^2 \cdot 0{,}00022 - 0{,}70652^2 = 10{,}78799$

b) $E(G) = E(A-E) = E(A) - E(E) = 0{,}70652 - 1 = -0{,}29348$

$Var(G) = Var(A-E) = Var(A) - Var(E) = Var(A)$,da E konstant

c) $P(|\bar{G} - E(G)| < 0{,}5) > 0{,}9$

$$1 - \frac{Var(\bar{G})}{0{,}5^2} > 0{,}9$$

$$1 - \frac{Var(G)}{n \cdot 0{,}5^2} > 0{,}9$$

$\frac{10{,}78799}{n \cdot 0{,}25} < 0{,}1 \quad n > \frac{10{,}78799}{0{,}25 \cdot 0{,}1} \quad n > 431{,}5$ nach mindestens 432 Spielen

3.

	für p_1 0...k	gegen p_1 k+1...1000
$p_1 = 0{,}025$		$\leq 0{,}05$
$p_2 > 0{,}025$		

$\mu = 1000 \cdot 0{,}025 = 25$

$\sum_{k+1}^{1000} P(25;i) \leq 0{,}05$

$1 - \sum_0^k P(25;i) \leq 0{,}05$

$\sum_0^k P(25;i) \geq 0{,}95$

$k \geq 33$

$A = [0;33] \quad \bar{A} = [34;1000]$

4. kein Gewinnlos (also k < 4)
an den ersten vier Stellen genau zweimal Ziffer 2
} => an den hinteren drei Stellen keinmal oder einmal Ziffer 2

a) $P = P(E_2) \cdot 0{,}7^3 + P(E_2) \cdot \binom{3}{1} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}20745$ ($P(E_2)$ siehe 1.)

b) Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Freilos (F) unter der Bedingung, einen Haupttreffer (100) zu erzielen.

$$P_{100}(F) = \frac{P(F \cap 100)}{P(100)} = \frac{0{,}000055}{0{,}000275} = 0{,}20$$

NR: $P(F \cap 100) = P(F) \cdot P(100) + P(F)^2 \cdot P(100) =$
$= 0{,}20745 \cdot 0{,}00022 + 0{,}20745^2 \cdot 0{,}00022 = 0{,}000055$

$P(100) = P(100) + P(F) \cdot P(100) + P(F)^2 \cdot P(100) =$
$= 0{,}00022 + 0{,}000055 = 0{,}000275$

Leistungskurs Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 1990
Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik IV

1. An einer Tankstelle wird jedes tankende Auto überprüft, ob es mit einem Katalysator ausgerüstet ist (K-Auto) oder nicht.

   a) In einer Schlange von 20 Autos vor der Tankstelle stehen genau 5 K-Autos.

      α) Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es, wenn man nur K-Autos und Nicht-K-Autos unterscheidet?

      β) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die fünf K-Autos in der 2. Hälfte der Schlange?

      γ) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die fünf K-Autos direkt hintereinander? 6 BE

   b) Wie groß müßte der Anteil p der K-Autos sein, damit unter 20 Autos mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit mindestens ein K-Auto ist? 5 BE

   c) Wie viele Autos müssen mindestens überprüft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% die relative Häufigkeit der K-Autos von der tatsächlichen (unbekannten) Wahrscheinlichkeit für ein K-Auto um weniger als 2% abweicht? Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschow und wählen Sie für $p(1-p)$ eine geeignete Abschätzung. 5 BE

   d) Durchschnittlich tanken täglich zwischen 23 Uhr und 24 Uhr 4 K-Autos an der Tankstelle. Bestimmen Sie mit Hilfe der Poisson-Näherung die Wahrscheinlichkeit, daß heute zwischen 23 Uhr und 24 Uhr mindestens 5 K-Autos tanken. 4 BE

2. Zwei Firmen A und B liefern ein Bauteil T zu den Katalysatoren. 20% der Bauteile T der Firma A sind fehlerhaft, von denen der Firma B sind sogar 30% fehlerhaft.

   a) $\frac{2}{3}$ aller fehlerhaften Bauteile T sind von der Firma A.
   Wieviel Prozent der Bauteile T werden demnach von der Firma A geliefert? 8 BE

   b) Bei einer Lieferung von 400 Bauteilen T, die alle von der gleichen Firma stammen, fehlen die Lieferpapiere, so daß der Hersteller nicht mehr feststellbar ist.

      α) Folgende Entscheidungsregel wird getroffen:
      Sind unter den 400 Bauteilen mindestens 99 fehlerhaft, dann wird die Lieferung der Firma B zugeordnet, sonst der Firma A.
      Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird damit die Lieferung fälschlicherweise der Firma B zugeordnet?
      Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. 5 BE

      β) Bis zu welchem Höchstwert der Anzahl von fehlerhaften Bauteilen kann man die Lieferung der Firma A zuordnen, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Zuordnung zu A höchstens 1% sein soll?
      Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. 7 BE

Lösung

1\. a) $A(\alpha) = \binom{20}{5} = 15\,504$

$$P(\beta) = \frac{\binom{10}{0}\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{252}{15\,504} = 0{,}01625$$

$$P(\beta) = \frac{16}{\binom{20}{5}} = \frac{16}{15\,504} = 0{,}00103$$

Anmerkung
da KKKKK...............
.KKKKK..............
bis
...............KKKKK

b) $1 - (1-p)^{20} > 0{,}9$

$(1-p)^{20} < 0{,}1$

$1 - p < 0{,}1^{\frac{1}{20}}$

$p > 1 - 0{,}1^{\frac{1}{20}}$

$p > 0{,}10875$

c) $P(|H - p| < 0{,}02) > 0{,}9$

$1 - \frac{n \cdot p(1-p)}{(0{,}02 \cdot n)^2} > 0{,}9$

$1 - \frac{p(1-p)}{0{,}0004 \cdot n} > 0{,}9$

$1 - \frac{\frac{1}{4}}{0{,}0004 \cdot n} > 0{,}9$

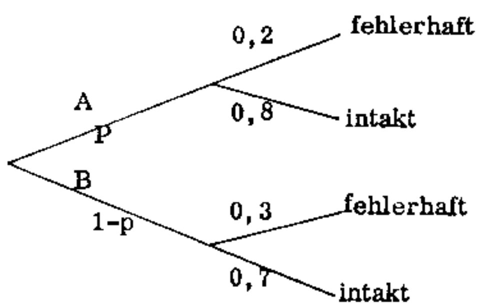
$\frac{1}{4 \cdot 0{,}0004 \cdot n} < 0{,}1$

$n > \frac{1}{4 \cdot 0{,}0004 \cdot 0{,}1}$

$n > 6250$ mindestens 6251 Autos

d) $1 - \sum_{0}^{4} P(4;i) = 1 - 0{,}62884 = 0{,}37116$

2\. a)



$P_{\text{fehlerhaft}}(A) = \frac{2}{3}$

$$P_{\text{fehlerhaft}}(A) = \frac{P(f \cap A)}{P(f)} = \frac{p \cdot 0{,}2}{p \cdot 0{,}2 + (1-p) \cdot 0{,}3} = \frac{0{,}2p}{0{,}3 - 0{,}1p}$$

$\frac{0{,}2p}{0{,}3 - 0{,}1p} = \frac{2}{3}$

$0{,}6p = 0{,}6 - 0{,}2p$

$0{,}8p = 0{,}6$

$p = \frac{3}{4}$

b)

	für A $0\ldots98$	für B $99\ldots400$
$p_1 = 0{,}2$		α
$p_2 = 0{,}3$		

$$P(\alpha) = \sum_{99}^{400} B(400;0{,}2;i) \approx$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{98 - 400\cdot0{,}2 + 0{,}5}{\sqrt{400\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi(2{,}3125)$$
$$\approx 1 - 0{,}98956 = 0{,}01044$$

$$P(\beta) \le 0{,}01$$

$$\sum_{0}^{k} B(400;0{,}3;i) \le 0{,}01$$

$$\Phi\left(\frac{k - 400\cdot0{,}3 + 0{,}5}{\sqrt{400\cdot0{,}3\cdot0{,}7}}\right) \le 0{,}01$$

$$\frac{k - 120 + 0{,}5}{\sqrt{84}} \le -2{,}3264$$

$k \le 98{,}18$
höchstens 98 fehlerhafte Bauteile, also Entscheidungsregel wie bei α.

Leistungskurs Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 1990
Analytische Geometrie V

In einem kartesischem Koordinatensystem mit Ursprung O sind die drei Ebenen:

E_1: $4x_1 - 3x_2 - rx_3 = 0$
E_2: $-x_1 + 7x_2 + rx_3 = 50$ $\quad (r \in \mathbb{R})$
E_3: $rx_1 \qquad - 4x_3 = 6r$

und der Punkt A (6|8|0) gegeben.

1. Zeigen Sie, daß der Punkt A für jeden Wert von r in allen drei Ebenen liegt. Welche Bedingung muß r erfüllen, damit die drei Ebenen nur diesen Punkt gemeinsam haben? 5 BE

2. Im folgenden sei r = 5.

   a) Die Ebenen E_1, E_2, E_3 haben im Fall r = 5 eine Gerade s gemeinsam. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden s auf. Weisen Sie nach, daß s auf OA senkrecht steht. 5 BE

   [Mögliches Teilergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathbb{R}$]

   b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, bezüglich der die Punkte O und A Spiegelpunkte zueinander sind. Zeigen Sie, daß F und die Gerade s keinen Punkt gemeinsam haben. 3 BE

   c) Mit der Strecke [OA] als Basis werden nun gleichschenklige Dreiecke OAP betrachtet, deren Spitzen $P(p_1|p_2|p_3)$ in der Ebene E_2 liegen. Bestimmen Sie für die Menge h dieser Punkte P eine Gleichung in Parameterform. Bestätigen Sie ferner, daß h parallel zu s liegt. 7 BE

   [Mögliches Teilergebnis: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$]

   d) Ein spezieller Punkt von h ist P'(1|5,5|2,5). Welche Neigung hat die Ebene des Dreiecks OAP' gegen die x_1x_2-Ebene? 4 BE

   e) Begründen Sie, daß unter allen in Teilaufgabe c) beschriebenen Dreiecken OAP das Dreick OAP' minimalen Flächeninhalt hat. 6 BE

1. A in E_1: $24 - 24 - 0r = 0$ erfüllt
   A in E_2: $-6 + 56 + 0r = 50$ erfüllt
   A in E_3: $6r - 0 = 6r$ erfüllt

   $$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -r \\ -1 & 7 & r \\ r & 0 & -4 \end{vmatrix} = -112 - 3r^2 + 7r^2 + 12 = -100 + 4r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 5$$

   für $r \neq \pm 5$ nur genau A gemeinsam

2. a) E_1: $4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0$
   E_2: $-x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 50$
   E_3: $5x_1 - 4x_3 = 30$

   E_3 umwandeln in Parameterform

   $5x_1 - 4x_3 = 30$
   $x_1 = 6 + 0,8x_3$ mit $x_2 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ ergibt sich

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $E_3 \cap E_1$: $4(6 + 0,8\mu) - 3\lambda - 5\mu = 0$
   $24 + 3,2\mu - 3\lambda - 5\mu = 0$
   $\lambda = 8 - 0,6\mu$

   $$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (8-0,6\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

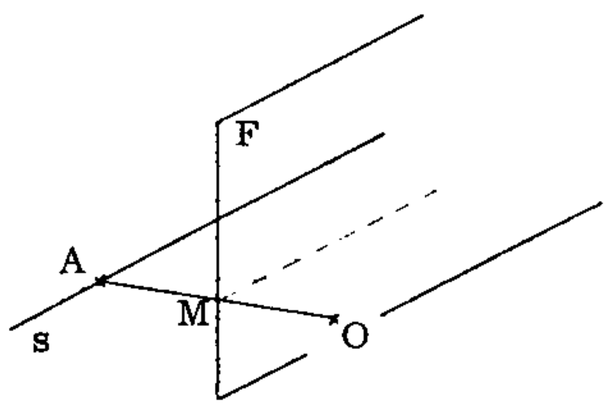
   Da die Angabe die Existenz einer gemeinsamen Schnittgeraden s aller <u>drei</u> Ebenen voraussetzt, ist ein Nachweis $s \subset E_2$ hier nicht erforderlich. Wäre ein Nachweis $s \subset E_2$ verlangt, zeigt man am besten, daß zwei Punkte von s (z.B. (6|8|0) und (10|5|5)) die Gleichung von E_2 erfüllen.

   $$s \perp OA, \quad \text{da} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 24 - 24 = 0$$

   b) $\vec{OA}$ ist Normalenvektor zu F; Mittelpunkt M(3|4|0) von [OA] liegt auf F

   $$F: \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

   F: $6x_1 + 8x_2 - 50 = 0$
   $3x_1 + 4x_2 - 25 = 0$



   $s \cap F = \{ \}$
   anschaulich: $A \in s$; $A \notin F$
   $OA \perp F$; $OA \perp s$
   also $s \parallel F$

   rechnerisch: $3(6+4\mu) + 4(8-3\mu) - 25 = 0$
   $18 + 12\mu + 32 - 24\mu - 25 = 0$
   $25 = 0$ Widerspruch

c) Alle Spitzen P müssen auf der Ebene F liegen, da diese O nach A spiegelt (siehe b); sollen die Spitzen P auch in E_2 liegen, muß h die Schnittgerade der Ebenen F und E_2 sein.

$F \cap E_2 = h$
F umwandeln in Parameterform

$3x_1 + 4x_2 - 25 = 0$

$x_1 = -\frac{4}{3}x_2 + \frac{25}{3}$ mit $x_2 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F \cap E_2:\ -\left(\frac{25}{3} - 4\lambda\right) + 7\cdot 3\lambda + 5\mu - 50 = 0$$

$$25\lambda + 5\mu - \frac{175}{3} = 0$$

$$\mu = \frac{35}{3} - 5\mu$$

$$h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{35}{3} - 5\lambda\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} \\ 0 \\ \frac{35}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

für $\lambda = \frac{7}{3}$ ergibt sich der Punkt $(-1|7|0)$

$$h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

s und h sind parallel, da ihre Richtungsvektoren parallel sind

d) Da O und A in der x_1-x_2-Ebene liegen, entspricht die Neigung des $\Delta OAP'$ der Neigung der Geraden MP' gegen die x_1-x_2-Ebene

$$\overrightarrow{MP'} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 5{,}5 - 4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\sin\varphi = \left| \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{12{,}5} \cdot 1} \right| = \frac{2{,}5}{\sqrt{12{,}5}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

e) $MP' \perp h$, da $\begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = -8 - 4{,}5 + 12{,}5 = 0$

=> von allen ΔOAP besitzt $\Delta OAP'$ die kleinste Höhe und damit den kleinsten Flächeninhalt.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(12,5|3|4) und B(2,5|6|0) gegeben.

1. a) Eine Ebene E liegt parallel zur x_1-Achse und enthält die Punkte A und B. Stellen Sie für E eine Gleichung in Normalenform auf. 4 BE
[Mögliches Ergebnis: E: $4x_2 + 3x_3 - 24 = 0$]

   b) Berechnen Sie die Schnittpunkte von E mit der x_2-Achse bzw. x_3-Achse. Legen Sie ein Schrägbild des Koordinatensystems an, tragen Sie die Punkte A und B ein, und machen Sie die Lage der Ebene E durch Einzeichnen ihrer Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen deutlich. 4 BE

2. a) Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Geraden g, die im Punkt B auf AB senkrecht steht und in der Ebene E liegt. 4 BE

   b) Das Rechteck ABCD soll ganz in der Ebene E, die Ecke C außerdem in der x_2x_3-Ebene liegen.
Berechnen Sie die Koordinaten von C und D. 4 BE
[Teilergebnis: C(0|3|4)]

   c) Ergänzen Sie die Zeichnung durch das Rechteck ABCD, ferner durch die Punkte A_0, B_0, C_0, D_0, die durch senkrechte Projektion von A, B, C, D auf die x_1x_2-Ebene entstehen. Welches besondere Viereck bestimmen die Punkte A_0, B_0, C_0, D_0? Geben Sie auch die Koordinaten dieser Punkte an. 3 BE

3. a) A_0, B_0, C_0, D_0 ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze S im Inneren oder auf dem Rand von Dreieck ACD liegt. Für welche Lagen von S nimmt das Pyramidenvolumen den kleinsten Wert an? Berechnen Sie diesen kleinsten Wert. 8 BE

   b) Ermitteln Sie ohne weitere Rechnung die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes von B_0 auf die Ebene A_0C_0C, und tragen Sie F in die Zeichnung ein. 3 BE

Lösung

1\. a) $$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2,5 - 12,5 \\ 6 - 3 \\ 0 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

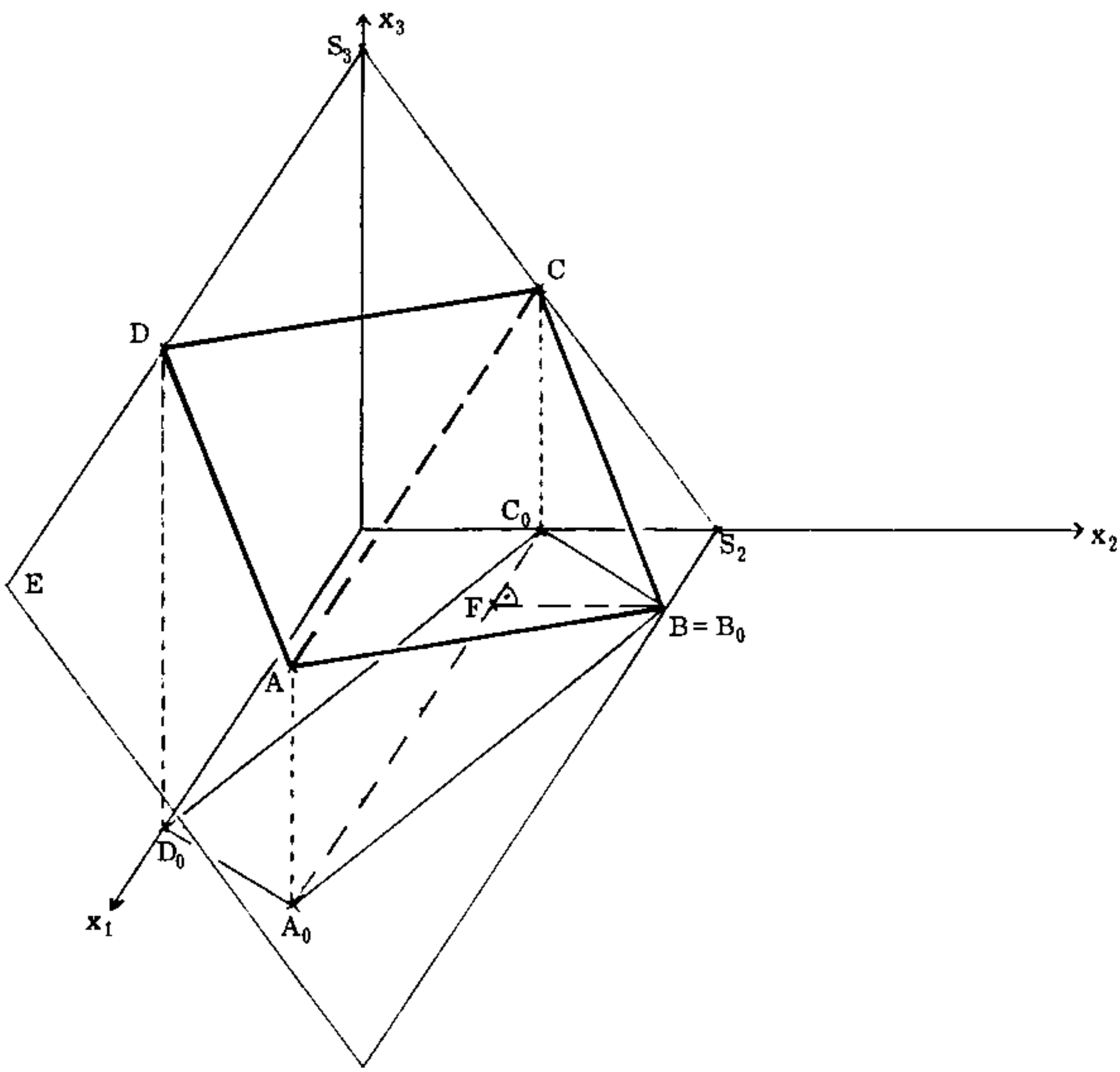
$$E: \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E: \quad 4x_2 + 3x_3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2,5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$4x_2 + 3x_3 - 24 = 0$$

b) $E \cap x_2$-Achse: $S_2(0|6|0)$
$E \cap x_3$-Achse: $S_3(0|0|8)$



2. a) $g \perp AB$ und $g \subset E$, also $g \perp \vec{n}_E$

$$\vec{u}_g = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 16 \\ 30 \\ -40 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

b) C auf g und in der x_2-x_3-Ebene, also $c_1 = 0$

C für $\lambda = -\frac{1}{2}$: $C(0|3|4)$

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 12,5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - 2,5 \\ 3 - 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

c) $A_0(12,5|3|0)$

$B_0 = B$ $\qquad \overrightarrow{A_0B_0} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{D_0C_0}$

$C_0(0|3|0)$

$D_0(10|0|0)$ $\qquad \overrightarrow{C_0B_0} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{D_0A_0}$

Viereck $A_0B_0C_0D_0$ ist ein Parallelogramm.

3. a) kleinster Wert für $S \in [AC]$, da Grundfläche stets gleich und für $S \in [AC]$ minimale Höhe

$$V = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{C_0B_0} \circ [\overrightarrow{C_0D_0} \times \overrightarrow{C_0C}]\right) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2,5 & 10 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(30 + 120) = 50$$

b) $F \in x_1$-x_2-Ebene $\Rightarrow$ $f_3 = 0$

$F \in A_0C_0$ und $A_0C_0 \parallel x_1$-Achse $\Rightarrow$ $f_2 = a_2 = c_2 = 3$

$F \in$ Lot durch B_0 und Lot $\parallel x_2$-Achse

(wegen $A_0C_0 \parallel x_1$-Achse in x_1-x_2-Ebene)

$\Rightarrow$ $f_1 = b_1 = 2,5$

$\Rightarrow$ $F(2,5|3|0)$