Aufg.-Nr.: 2	Bereich: e-Funktion	Kursart: GK	CAS

Forellenzucht

- **In einer Forellenzuchtanstalt im Sauerland wurde bei gleichaltrigen Forellen die durchschnittliche Länge ermittelt. Die Tabelle zeigt einen Teil der gewonnenen Daten:**

Alter (in Monaten)	**0**	**2**	**5**	**8**	**10**
Länge (in cm)	**0,2**	**9,8**	**17,8**	**21,6**	**22,9**

- **Ausgewachsene Forellen erreichen nach zwei Jahren eine durchschnittliche Länge von 25 cm.**

a) Begründen Sie, warum man beim Wachstum von Forellen von begrenztem Wachstum sprechen kann.

b) Ermitteln Sie aus den Daten eine Funktion f1, die die durchschnittliche Länge von Forellen zur Zeit t beschreibt und skizzieren Sie den Graphen auf dem vorbereiteten Arbeitsblatt.

(*zur Kontrolle:* Man erhält näherungsweise f1(t) = $25-\frac{124}{5}\cdot e^{-0,247x}$)

c) Berechnen Sie auf der Grundlage von f1 die durchschnittliche Wachstumsrate für den 4. Monat.

- **In einer Versuchsanstalt im Siegerland hat ein Biologe eine einzelne Forelle beobachtet und jeweils das Wachstum pro Monat aufgezeichnet. Folgende Daten sind vorhanden:**

Alter (in Monaten)	**1**	**4**	**6**	**8**
Längenwachstum pro Monat (in cm)	**5,5**	**2,6**	**1,6**	**1**

d) Bestimmen Sie für die Forelle aus dem Siegerland eine ganzrationale Funktion h1, die jedem Monat die Wachstumsrate zuordnet. Der zugehörige Graph bis zum 24. Monat ist bereits auf dem zugehörigen Arbeitsblatt eingezeichnet.

e) Machen Sie einen exponentiellen Ansatz (h2) und zeichnen Sie den Graphen in dasselbe Koordinatensystem. Falls Sie die Aufgabe nicht lösen können, arbeiten Sie mit $h2(x) = 7 \cdot e^{-0,2497x}$ weiter.

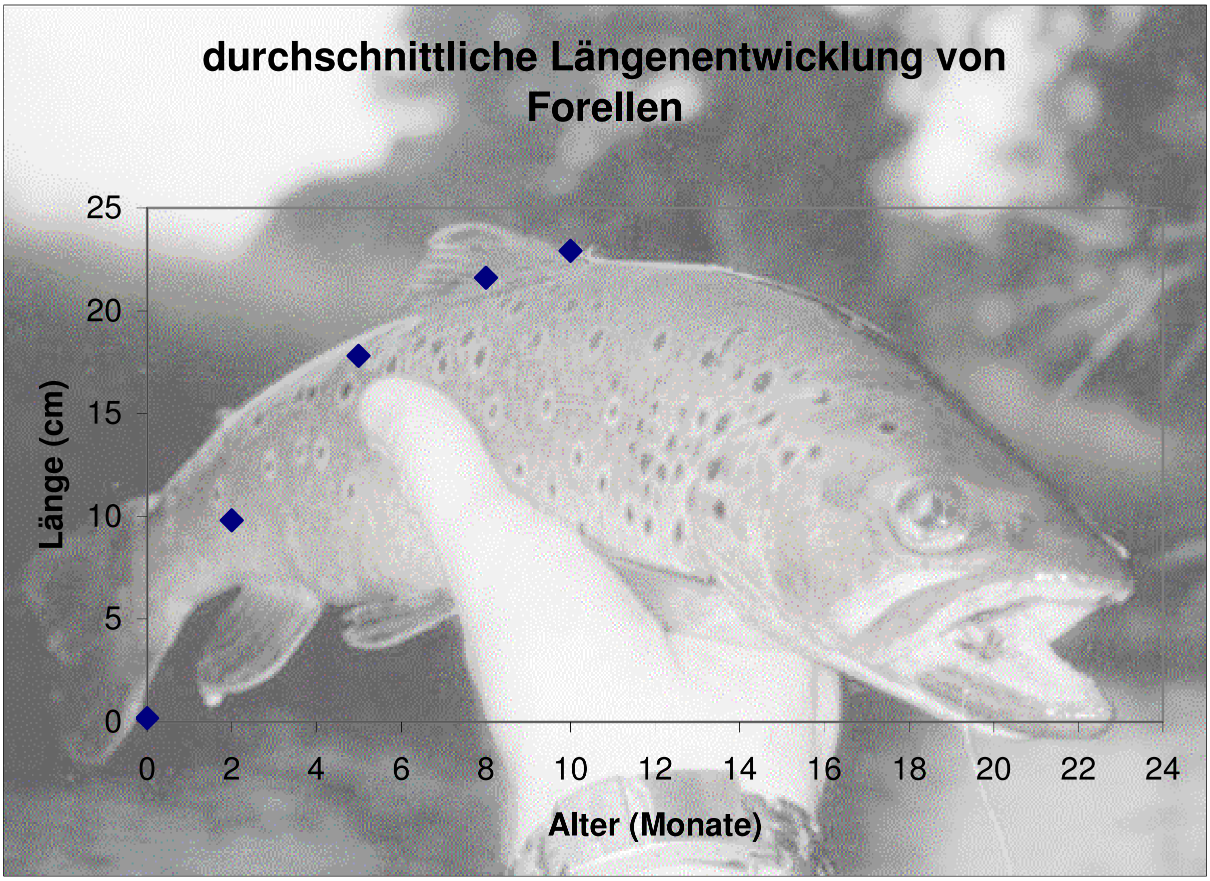
f) Untersuchen Sie die Güte der beiden Modellierungsansätze.

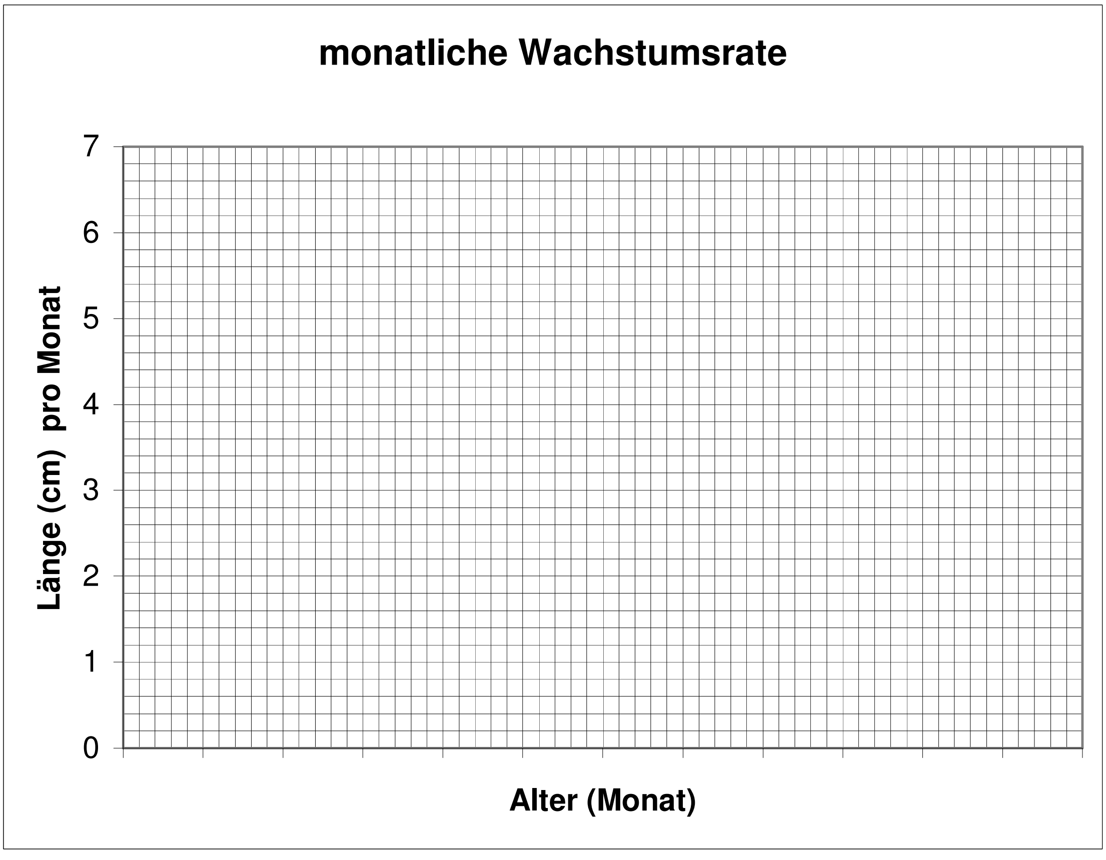
g) Rechnen Sie auf der Grundlage von h2 nach, dass der Fisch aus dem Siegerland ein großes Exemplar war.

h) Bestimmen Sie eine Funktion h3, die die Länge des Fisches aus dem Siegerland zur Zeit t beschreibt. Gehen Sie dabei davon aus, dass seine Länge beim Schlüpfen auch 0,2 cm gewesen ist.

Aufg.-Nr.: 2	Bereich: e-Funktion	Kursart: GK	CAS

Arbeitsblatt zur Aufgabe Forellenzucht





Lösung

a) Die Forellen erreichen nach zwei Jahren eine durchschnittliche Länge von 25cm und sind dann ausgewachsen. Dem Anwachsen ist also eine natürliche Schranke S gesetzt. Die Zunahme pro Zeiteinheit wird umso geringer, je mehr sich der momentane Bestand $f(t)$ der Schranke nähert, je kleiner also die Differenz $|S - f(t)|$ ist. Zur Modellierung ist die Annahme berechtigt, dass die momentane Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ proportional ist zur Differenz $S - f(t)$, also $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$ mit $k > 0$.

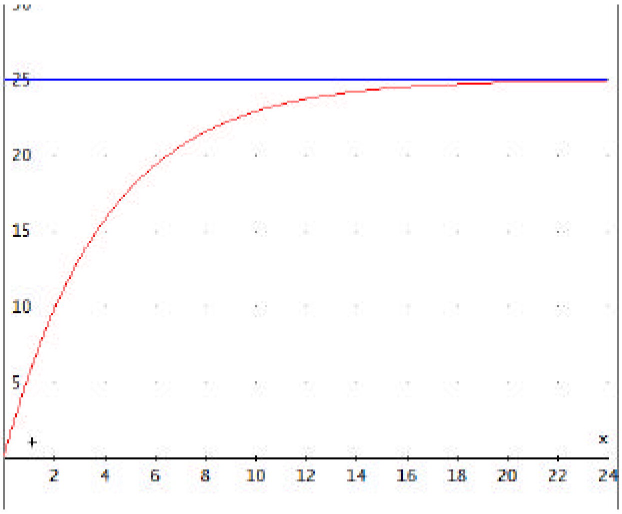
b) Zur Lösung dieser Differentialgleichung des beschränkten Wachstums macht man den Ansatz $f_1(t) = S - c \cdot e^{-kt}$.

Es gilt $\lim\limits_{t \to \infty} f_1(t) = S = 25$

Weiter $f_1(0) = 25 - c = 0{,}2 \Leftrightarrow c = \frac{124}{5}$

und $f_1(10) = 25 - \frac{124}{5} \cdot e^{-k \cdot 10} = 22{,}9 \Rightarrow k = -\frac{1}{10}\left(\ln(22{,}9 - 25) \cdot \left(-\frac{5}{124}\right)\right) \approx 0{,}247$

Nimmt man andere Wertepaare der Tabelle, so gibt es geringfügige Änderung bei den Nachkommastellen.



c) Für den Mittelwert gilt $\overline{m} = \frac{1}{4-3} \cdot \int_3^4 f_1'(t)dt = f_1(4) - f_1(3) \approx 2{,}587$.

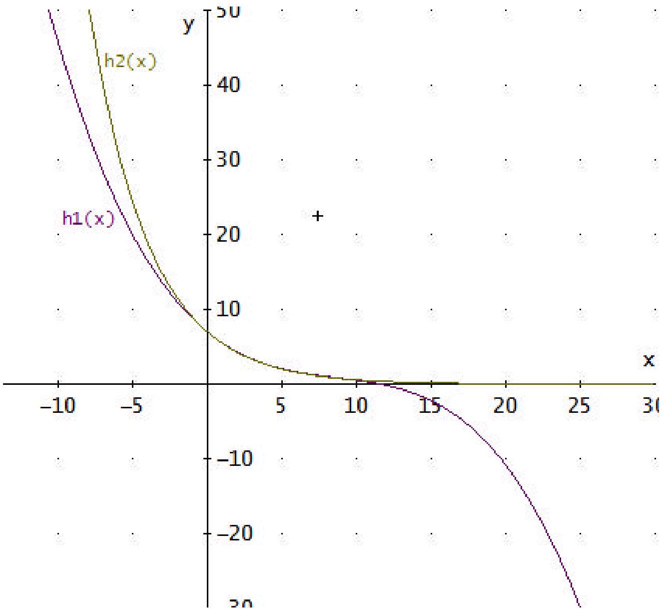
d) möglicher Ansatz: $h_1(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ führt auf das Gleichungssystem:

$$h_1(1) = a + b + c + d = 5{,}5$$
$$h_1(4) = 64a + 16b + 4c + d = 2{,}6$$
$$h_1(6) = 216a + 36b + 6c + d = 1{,}6$$
$$h_1(8) = 512a + 64b + 8c + d = 1$$

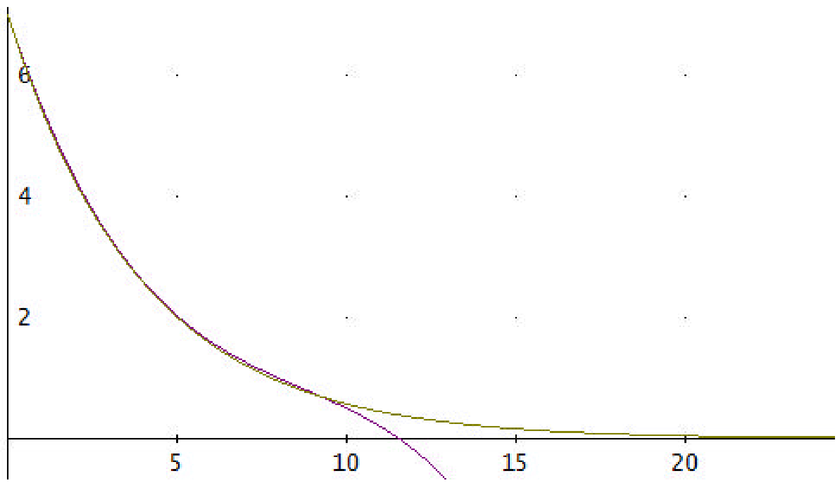
Mit dem CAS ergibt dies die Koeffizienten

$a \approx -0{,}00619$; $b \approx 0{,}16143$; $c \approx -1{,}6431$; $d \approx 6{,}9886$

Die in Aufgabenteil **e)** gegebene Funktion modelliert den Sachverhalt besser.



<u>relevanter Bereich</u>



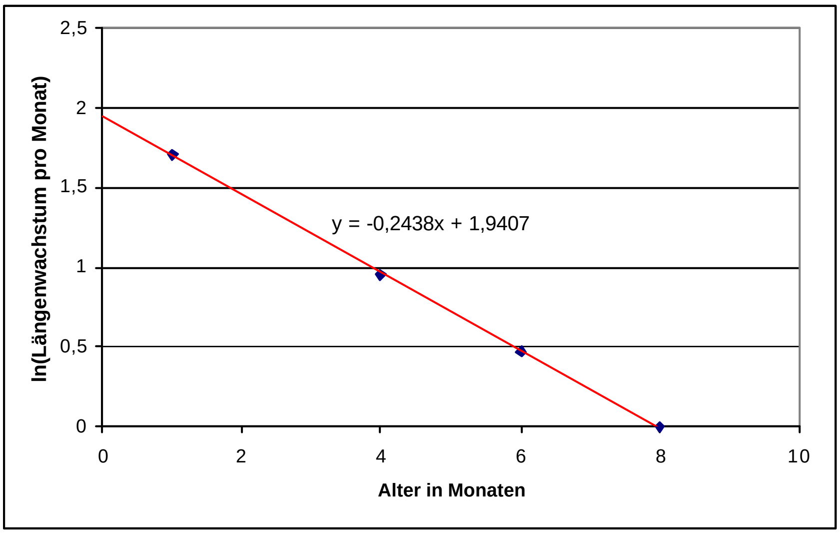
e) Ansatz $h_2(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}$

I. $h_2(1) = c \cdot e^{-k} = 5{,}5$; II. $h_2(4) = c \cdot e^{-4k} = 2{,}6$

II. auflösen nach c und einsetzen in I. ergibt

$$5{,}5 = 2{,}6 \cdot \frac{e^{-k}}{e^{-4k}} = 2{,}6 \cdot e^{3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{5{,}5}{2{,}6}\right) \approx 0{,}2497 \Rightarrow c = \frac{2{,}6}{e^{-4 \cdot 0{,}2497}} \approx 7{,}06.$$

f) Die Zeichnung zeigt, dass der exponentielle Ansatz das Längenwachstum über 24 Monate besser beschreibt, da der Graph auch jenseits von ca. 12 Monaten oberhalb der x-Achse verläuft. Ob die Funktionsanpassung sinnvoll ist, kann man z.B. durch Auftragen der Messwerte in ein $(x \mid \ln(y))$ -Koordinatensystem sehen.



Der gewählte Ansatz der Exponentialfunktion ist angemessen, es ergibt sich eine Ausgleichsgerade im $(x \mid \ln(y))$ -Koordinatensystem.

g) $$\int_0^{24} 7{,}06 \cdot e^{-0{,}2497 \cdot t} dt = -\frac{7{,}06}{0{,}2497} \cdot e^{-0{,}2497 \cdot t} \Big|_0^{24} \approx 28{,}2$$

Die Siegerländer Forelle ist also nach 24 Monaten ungefähr 28 cm lang, es handelt sich also um ein größeres Exemplar.

h) $$h_3(t) = 0{,}2 + \int_0^t h_2(t)dt \approx 0{,}2 + \frac{7{,}06}{0{,}2497} \cdot \left(1 - e^{-0{,}2497 \cdot t}\right)$$