Aufg.-Nr.: 5	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR

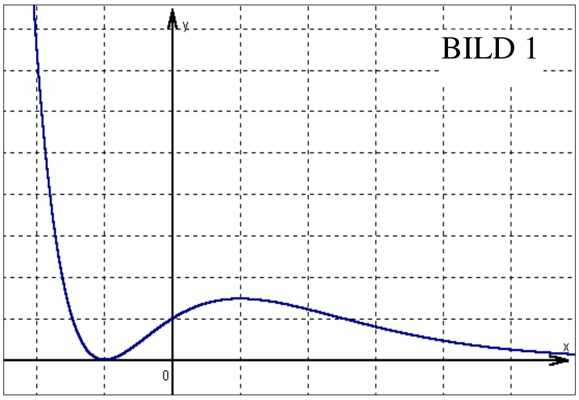
Graph f, f', F

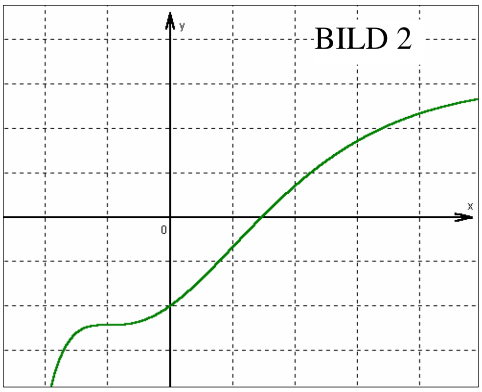
Gegeben ist die Exponentialfunktion f durch den Term

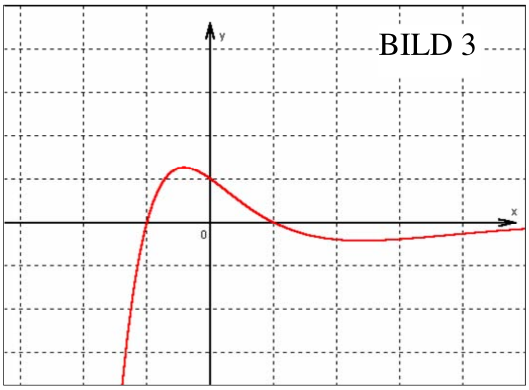
$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x} \qquad ; \; x \in R$$

a) Bestimmen Sie für die Funktion f die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, das Verhalten im Unendlichen und die relativen Extrema.

b) Gegeben sind die Graphen *der Funktion f*, der Graph *ihrer Ableitungsfunktion f'* und der Graph *einer Stammfunktion F von f.*
Begründen Sie *möglichst vielseitig*, dass nur Bild 1 den Graphen von f darstellen kann.
Entscheiden Sie, welcher Graph f' und welcher Graph F darstellt und begründen Sie Ihre Entscheidung!







c) Der Graph von f schließt im 1.Quadranten mit der x-Achse eine Fläche ein.

1. Zeigen Sie, dass die Funktion F mit F(x) = $(-x^2 - 4x - 5) \cdot e^{-x} + 3$ eine Stammfunktion zu f ist.
2. Berechnen Sie den Inhalt der oben beschriebenen Fläche.
3. Zeichnen Sie in das Bild mit dem Graphen der Funktion f den Graphen der Funktion g mit $g(x) = e^{-x}$ ein. Dieser Graph teilt die in c2 berechnete Fläche. Berechnen Sie das Teilverhältnis.

d) Gegeben ist das Integral $\int_{-2}^{b} \left(f(x) - g(x)\right) dx$. Für immer größer werdende Werte von b nähert sich der Integralwert dem Wert 0. Interpretieren Sie dieses Ergebnis hinsichtlich der von den Graphen der Funktionen f und g *insgesamt* eingeschlossenen Fläche?

Lösung

$f(x) := (x^2 + 2 \cdot x + 1) \cdot e^{-x}$ "Done" $f(x)$ $(x^2 + 2 \cdot x + 1) \cdot e^{-x}$

$fs(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$ "Done" $fs(x)$ $(1 - x^2) \cdot e^{-x}$

$fss(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ "Done" $fss(x)$ $(x^2 - 2 \cdot x - 1) \cdot e^{-x}$

$fsss(x) := \frac{d^3}{dx^3}(f(x))$ "Done" $fsss(x)$ $(-(x^2) + 4 \cdot x - 1) \cdot e^{-x}$

a)

a).1.a) $f(0)$ 1

a).1.b) $\text{solve}(f(x) = 0, x)$ $x = -1$

a).2 $\text{solve}(fs(x) = 0, x)$ $x = 1 \text{ or } x = -1$

$fss(-1)$ $2 \cdot e$ $f(-1)$ 0

$fss(1)$ $-2 \cdot e^{-1}$ $f(1)$ $4 \cdot e^{-1}$

Zusatz: Wendepunkte

$\text{solve}(fss(x) = 0, x)$ $x = -(\sqrt{2} - 1) \text{ or } x = \sqrt{2} + 1$

$fsss(-(\sqrt{2} - 1))$ $-2\sqrt{2} \cdot e^{(\sqrt{2} - 1)}$ $f(-(\sqrt{2} - 1))$ $(6 - 4\sqrt{2}) \cdot e^{(\sqrt{2} - 1)}$

$fsss(\sqrt{2} + 1)$ $2\sqrt{2} \cdot e^{(-\sqrt{2} - 1)}$ $f(\sqrt{2} + 1)$ $(4\sqrt{2} + 6) \cdot e^{(-\sqrt{2} - 1)}$

a).3.a) $\lim_{x \to -\infty}(f(x))$ ∞

a).3.b) $\lim_{x \to \infty}(f(x))$ 0

b)
BILD 1: Funktionsgraph
BILD 3: Graph der 1.Ableitung
BILD 2: Graph der Stammfunktion

c)

c) 1.

$sF(x) := \left(-\left(x^2\right) - 4 \cdot x - 5\right) \cdot e^{-x} + 3$ "Done" $sF(x)$ $\left(-\left(x^2\right) - 4 \cdot x - 5\right) \cdot e^{-x} + 3$

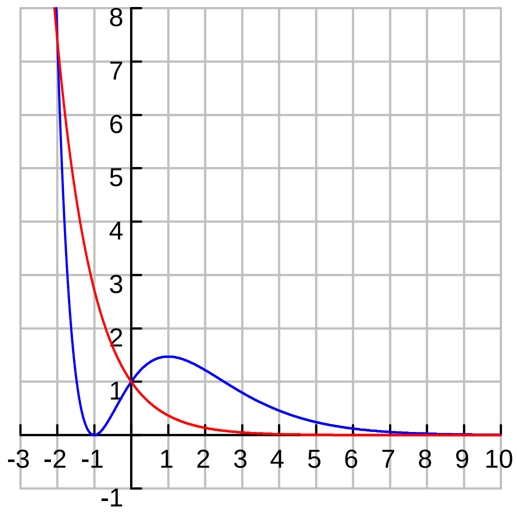
$\frac{d}{dx}\left(sF(x)\right)$ $\left(x^2 + 2 \cdot x + 1\right) \cdot e^{-x}$

c) 2.

$Af(u) := \int_0^u \left(f(x)\right) dx$ "Done" $Af(u)$ $\left(-\left(u^2\right) - 4 \cdot u - 5\right) \cdot e^{-u} + 5$ $\lim_{u \to \infty} \left(Af(u)\right)$ 5

c) 3.

$g(x) := e^{-x}$ "Done"



$Ag(u) := \int_0^u \left(g(x)\right) dx$ "Done" $Ag(u)$ $1 - e^{-u}$ $\lim_{u \to \infty} \left(Ag(u)\right)$ 1

Das Teilverhältnis ist dann 1:4.

d)

Aus der obigen Abbildung ist ersichtlich, dass die beiden Graphen zwei Flächenstücke einschließen: eines über dem Intervall [-2;0] und eines über dem Intervall [0;+oo[.
Das rechte Flächenstück hat (vgl. Aufgabenteil **c) 3.**) den Flächeninhalt 4, das zur Berechnung notwendige Integral hat (f>g) einen positiven Wert.
Das linke Flächenstück hat (vgl. **c)3**) ebenfalls einen Flächeninhalt, das zur Berechnung notwendige Integral hat (f<g) einen negativen Wert.
Da das zu betrachtende Integral gegen den Wert 0 strebt, muss somit der Wert des 'linken' Integrals -4 sein.