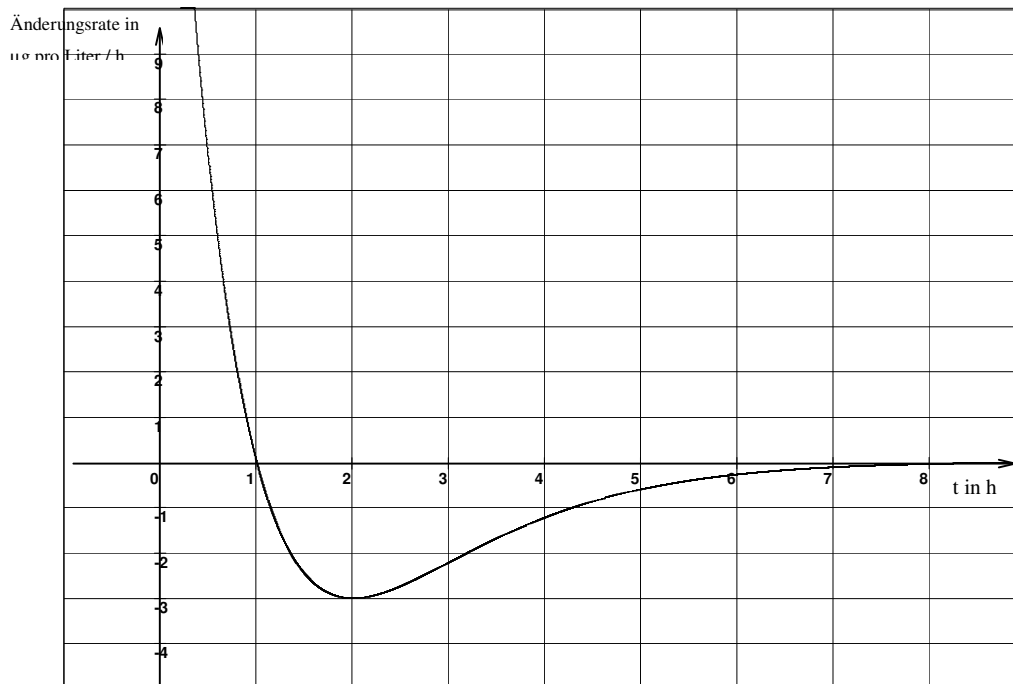


Arzneimittelkonzentration

Bei einer Arznei, z.B. einer Tablette, steht die Wirkung (z.B. Schmerzlinderung o.ä.) in direktem Zusammenhang mit der Konzentration des in der Arznei enthaltenen Wirkstoffes im Blut, d.h., bei hoher Konzentration des Wirkstoffes verspürt der Patient eine intensive Wirkung. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut wird in μg pro Liter angegeben.

Die nachfolgende Graphik zeigt die Änderungsrate der Konzentration in μg pro Liter je Stunde in Abhängigkeit von der Zeit t in h.

Dabei ist t die Zeit in h seit Beginn der Einnahme ($t = 0$).



- Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen die Wirksamkeit zunimmt und die Zeitintervalle, in denen die Wirksamkeit abnimmt. Begründen Sie Ihre Aussagen.
- Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Wirkstoffes am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.
- Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Abnahme der Konzentration am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.
- Die Wirksamkeit der Arznei wird durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung

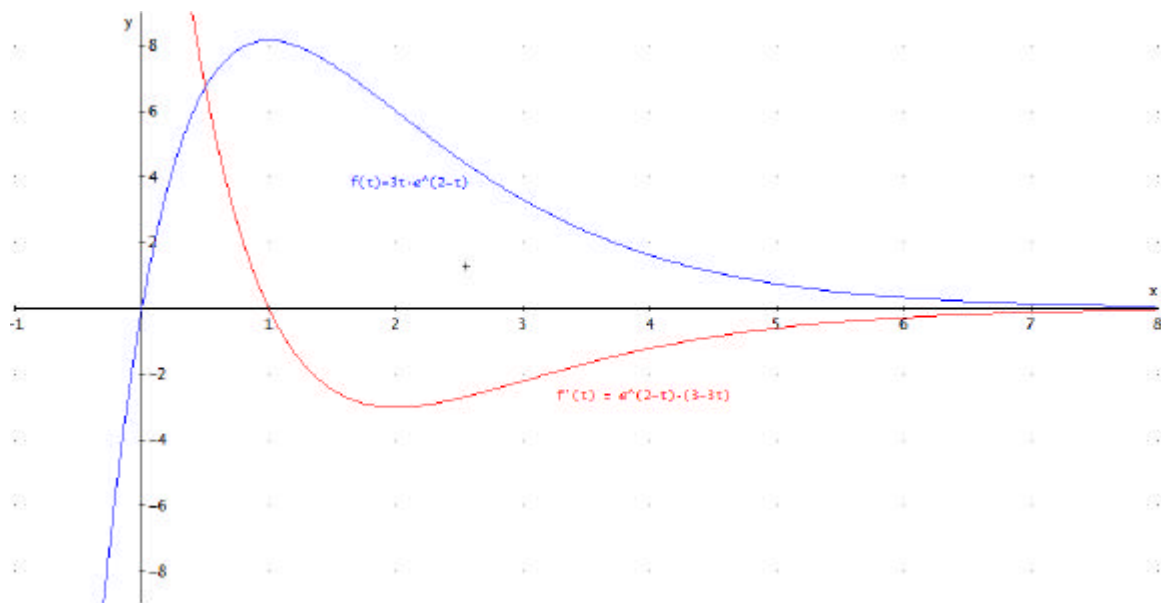
$$f(t) = 3t \cdot e^{2-t}; \quad t \geq 0$$

beschrieben. Dabei beschreibt $f(t)$ die Konzentration des Wirkstoffes im Blut (gemessen in μg pro Liter) zur Zeit t (gemessen in h seit der Einnahme). Weisen Sie unter Verwendung von f rechnerisch nach, dass Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe b korrekt ist. (Falls Sie b nicht gelöst haben, berechnen Sie nun den in b gesuchten Zeitpunkt). Berechnen Sie auch die Höhe der Konzentration zu diesem Zeitpunkt.

- Begründen Sie, dass das Vorzeichen von f' durch den Term $3 - 3t$ bestimmt wird, und erklären Sie mit Hilfe dieser Aussage nachträglich den Verlauf des abgebildeten Graphen.
- Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Wirksamkeit der Arznei.

Lösung

- a) Der Graph (rot) zeigt die Änderungsrate der Arzneimittelkonzentration in den ersten 8 Stunden. Im Intervall $0 < t < 1$ ist die Änderungsrate positiv, die Wirksamkeit nimmt also zu, von $t > 1$ bis zum Ende ist die Änderungsrate negativ, also nimmt die Wirksamkeit ab.



- b) Zum Zeitpunkt $t = 1$ ist die Änderungsrate 0, die Ableitungsfunktion hat dort einen Vorzeichenwechsel von + nach -, also liegt an der Stelle 1 ein Maximum der Wirksamkeit vor (blauer Graph)
- c) Die Abnahme ist am größten an der Stelle $t = 2$, an dieser Stelle hat die Funktion f eine Wendestelle (blauer Graph)
- d) Extrempunkte notwendige Bedingung $f'(t) = 0$

$$f'(t) = 3 \cdot e^{2-t} + 3t \cdot (-1) \cdot e^{2-t} = e^{2-t} \cdot (3 - 3t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

hinreichende Bedingung $f'(t) = 0$ und $f''(t) \neq 0$

$$f''(t) = -e^{2-t} \cdot (3 - 3t) + e^{2-t} \cdot (-3) = -e^{2-t} (6 - 3t)$$

$$f''(1) = -e \cdot 3 < 0 \Rightarrow HP(1 | 3e)$$

$$f(1) = 3e$$

- e) Da $e^{2-t} > 0$ ist, bestimmt $3 - 3t$ das Vorzeichen der Ableitung.

$3 - 3t \geq 0$ für $t \leq 1$ und $3 - 3t < 0$ für $t > 1$, also hat die Ableitungsfunktion an der Stelle 1 einen Vorzeichenwechsel von + nach -.

- f) Bis zu $t = 1$ nimmt die Konzentration und damit die Wirksamkeit zu, anschließend lässt die Wirksamkeit nach, bis nach 8 Stunden praktisch keine Wirkung mehr spürbar ist.