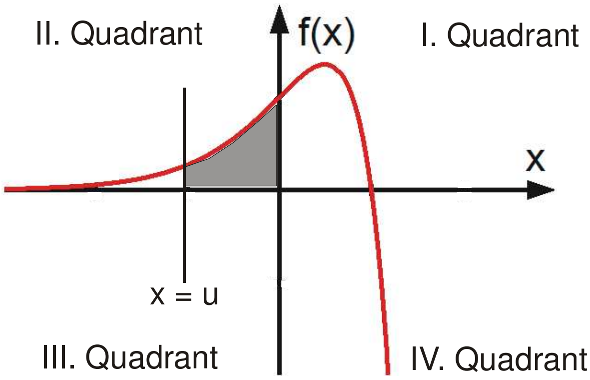
Aufg.-Nr.: 8	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR

Innermathematische Aufgabe

In der Abbildung rechts ist der Graph der Funktion f zu $f(x) = (1-x) \cdot e^{2x}$ dargestellt.



1. Berechnen Sie die Nullstelle, den Extrem- und den Wendepunkt von f. Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.
   Zur Kontrolle: $f''(x) = -4xe^{2x}$.
2. Zeigen Sie, dass $F(x) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von f ist.
3. Bestimmen Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten einschließt.
4. Der Graph von f schließt im II. Quadranten mit den Koordinatenachsen und der Geraden zu x = u, u < 0, eine Fläche ein, vgl. obige Abbildung.
   Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts in Abhängigkeit von u.
   Ermitteln Sie den Wert der Maßzahl für $u \to -\infty$ und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch.
5. Ein Punkt P bewegt sich im I. Quadranten auf dem Graphen von f. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch P und die beiden Koordinatenachsen bilden ein Rechteck. Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt eines solchen Rechtecks.

Lösung

$f(x) := (1-x)\cdot e^{(2\cdot x)}$ "Done" $f(x)$ $(1-x)\cdot e^{(2\cdot x)}$

$\mathrm{fs}(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$ "Done" $\mathrm{fs}(x)$ $(1-2\cdot x)\cdot e^{(2\cdot x)}$

$\mathrm{fss}(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ "Done" $\mathrm{fss}(x)$ $-4\cdot x\cdot e^{(2\cdot x)}$

$\mathrm{fsss}(x) := \frac{d^3}{dx^3}(f(x))$ "Done" $\mathrm{fsss}(x)$ $(-8\cdot x-4)\cdot e^{(2\cdot x)}$

1.

1.1 $\mathrm{solve}(f(x)=0, x)$ $x=1$

1.2 $\mathrm{solve}(\mathrm{fs}(x)=0, x)$ $x=\frac{1}{2}$ $\mathrm{fss}\left(\frac{1}{2}\right)$ $-2\cdot e$ $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\frac{e}{2}$

1.3 $\mathrm{solve}(\mathrm{fss}(x)=0, x)$ $x=0$ $\mathrm{fsss}(0)$ -4 $f(0)$ 1

1.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))$ 0 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))$ $-\infty$

2.

$\mathrm{sF}(x) := \left(\frac{-1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}\right)\cdot e^{(2\cdot x)}$ "Done" $\mathrm{sF}(x)$ $\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot e^{(2\cdot x)}$

$\frac{d}{dx}(\mathrm{sF}(x))$ $(1-x)\cdot e^{(2\cdot x)}$

3.

$\int_0^1 (f(x))\,dx$ $\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}$

4.

$A(u) := \int_u^0 (f(x))\,dx$ "Done" $A(u)$ $\frac{(2\cdot u-3)\cdot e^{(2\cdot u)}}{4}+\frac{3}{4}$

$\lim\limits_{u\to-\infty}(A(u))$ $\frac{3}{4}$

5.

Der Punkt P habe die Koordinaten (xp|yp) mit yp=f(xp). Dann gilt für den Flächeninhalt des zu betrachtenden Rechtecks

$A(xp) := xp \cdot f(xp)$ "Done" $A(xp)$ $-xp \cdot (xp - 1) \cdot e^{(2 \cdot xp)}$

$\mathrm{As}(xp) := \frac{d}{d\,xp}(A(xp))$ "Done" $\mathrm{As}(xp)$ $(1 - 2 \cdot xp^2) \cdot e^{(2 \cdot xp)}$

$\mathrm{Ass}(xp) := \frac{d^2}{d\,xp^2}(A(xp))$ "Done" $\mathrm{Ass}(xp)$ $(-4 \cdot xp^2 - 4 \cdot xp + 2) \cdot e^{(2 \cdot xp)}$

$\mathrm{solve}(\mathrm{As}(xp) = 0, xp)$ $xp = \frac{\sqrt{2}}{2}$ or $xp = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

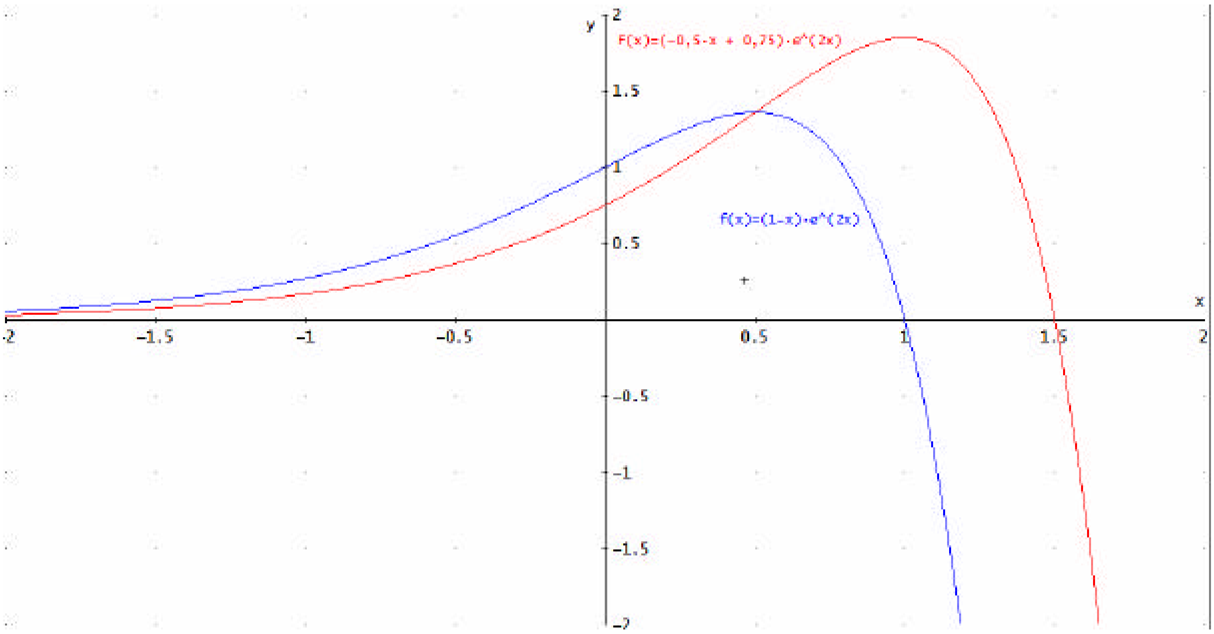
Da das Rechteck im ersten Quadranten liegen soll, entfällt die zweite Lösung.

$\mathrm{Ass}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $-2\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}}$, also relatives Maximum bei $\frac{\sqrt{2}}{2.}$ $.707107$

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{\sqrt{2}}$, also beträgt der maximale Flächeninhalt $\left(\frac{\sqrt{2}}{2.} - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{\sqrt{2}}$ $.851882$

Lösung

Der blaue Graph ist der in der Aufgabe abgebildete von f, der rote Graph ist der von F.



1. <u>Kurvendiskussion</u>

   a) Nullstelle $f(x) = (1-x) \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

   b) <u>Extrempunkte</u> notwendige Bedingung $f'(x) = 0$

   $$f'(x) = -1 \cdot e^{2x} + (1-x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x}(-1+2-2x) = \underbrace{e^{2x}}_{\neq 0}(1-2x) = 0$$

   $$\Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

   <u>hinreichende Bedingung</u> $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

   $$f''(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot (1-2x) + e^{2x} \cdot (-2) = e^{2x}(2-4x-2) = -4x \cdot e^{2x}$$

   $$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2\frac{1}{2}} = -2e < 0 \Rightarrow HP\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}e\right)$$

   $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e$$

c) <u>Wendepunkte</u>

notwendige Bedingung $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x \cdot e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

hinreichende Bedingung $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(x) = -4e^{2x} - 4x \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x}(-4 - 8x)$$
$$f'''(0) = -4 \neq 0 \Rightarrow WP(0|1)$$

$f(0) = 1$

d) <u>Grenzverhalten</u>

Die Exponentialfunktion entscheidet über das Grenzverhalten

$\lim_{x \to \infty} (1 - x) \cdot e^{2x} = -\infty$ (wegen –x kommt hier das Minus hin; vgl. mit Graph)

$$\lim_{x \to -\infty} (1 - x) \cdot e^{2x} = 0$$

2) <u>Stammfunktion</u>

$$F'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x}\left(-\frac{1}{2} - x + \frac{3}{2}\right) = (1 - x) \cdot e^{2x}$$

3) <u>Flächenberechnung</u>

Berechne das Integral von 0 bis zur Nullstelle 1. Da die Fläche oberhalb der x-Achse liegt, müssen keine Beträge verwendet werden.

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot e^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(e^2 - 3)$$

4) <u>Flächenberechnung</u>

$$\int_u^0 f(x)dx = F(0) - F(u) = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}u + \frac{3}{4}\right)e^{2u}$$

$$\lim_{u \to -\infty}\left(\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}u + \frac{3}{4}\right)e^{2u}\right) = \frac{3}{4}$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die nach links ins Unendliche reichende Fläche einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

5) <u>Extremwertaufgabe</u>

$A(x;y) = x \cdot y$

Nebenbedingung: Der Punkt $P(x;y)$ liegt auf dem Graphen von f, also
$y = (1-x) \cdot e^{2x}$

$\Rightarrow A(x) = x \cdot (1-x) \cdot e^{2x} = (x - x^2) \cdot e^{2x}$

<u>Extrempunkte</u> notwendige Bedingung $A'(x) = 0$

$$A'(x) = (1-2x) \cdot e^{2x} + (x - x^2) \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x} \cdot (-2x^2 + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{,1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

<u>hinreichende Bedingung</u> $A'(x) = 0$ und $A''(x) \neq 0$

$$A''(x) = 2 \cdot e^{2x}(-2x^2 + 1) + e^{2x}(-4x) = e^{2x} \cdot (-4x^2 - 4x + 2)$$

$$A''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{\sqrt{2}} \cdot \left(-4 \cdot \frac{2}{4} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right) = e^{\sqrt{2}}(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 2) = -2\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}} < 0$$

$$\Rightarrow HP\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \cdot e^{\sqrt{2}}\right)$$

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) == \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{4}\right) \cdot e^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \cdot e^{\sqrt{2}} \approx 0{,}85$$

Untersuchung der Ränder x = 1 und x = 0 ergibt jeweils A(0) = 0, also ist der gesuchte Flächeninhalt 0,85 FE (Flächeneinheiten)