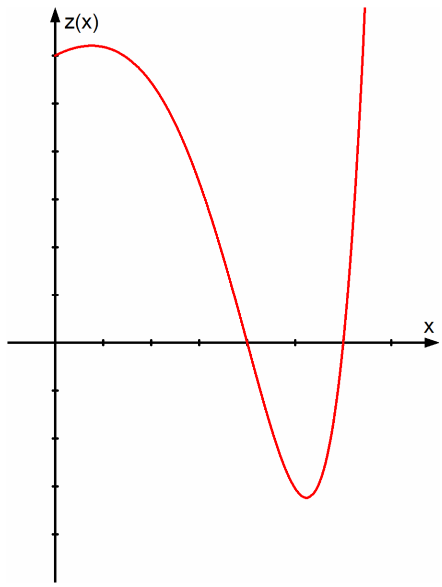
Aufg.-Nr.: 9	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR

Stausee

Ein Stausee ändert seine Wassermenge. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt. Die Zulaufratenfunktion ist gegeben durch $z(x) = (x^2 - 10x + 24)e^{\frac{1}{2}x}$. Der Graph von z ist rechts abgebildet.



Dabei wird x in Tagen und z(x) in tausend Kubikmeter pro Tag angegeben.
Betrachtet wird das Intervall [0;6,5], d.h.: $0 \le x \le 6{,}5$.
Hinweis: Eine negative Zulaufrate bedeutet, dass Wasser aus dem Stausee herausläuft.
Ohne eigene Herleitung dürfen Sie im Weiteren

$z''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right)e^{\frac{1}{2}x}$ und

$z'''(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\right)e^{\frac{1}{2}x}$ verwenden.

1. Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen das Wasser weder ein- noch abfließt. Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft.

2. Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Zulaufrate im betrachteten Intervall maximal ist.

   Zeigen Sie, dass $z'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\right)e^{\frac{1}{2}x}$ gilt.

3. Ermitteln Sie, welche Aussagen über die Änderung der Wassermenge zum Zeitpunkt x = 5 möglich sind.

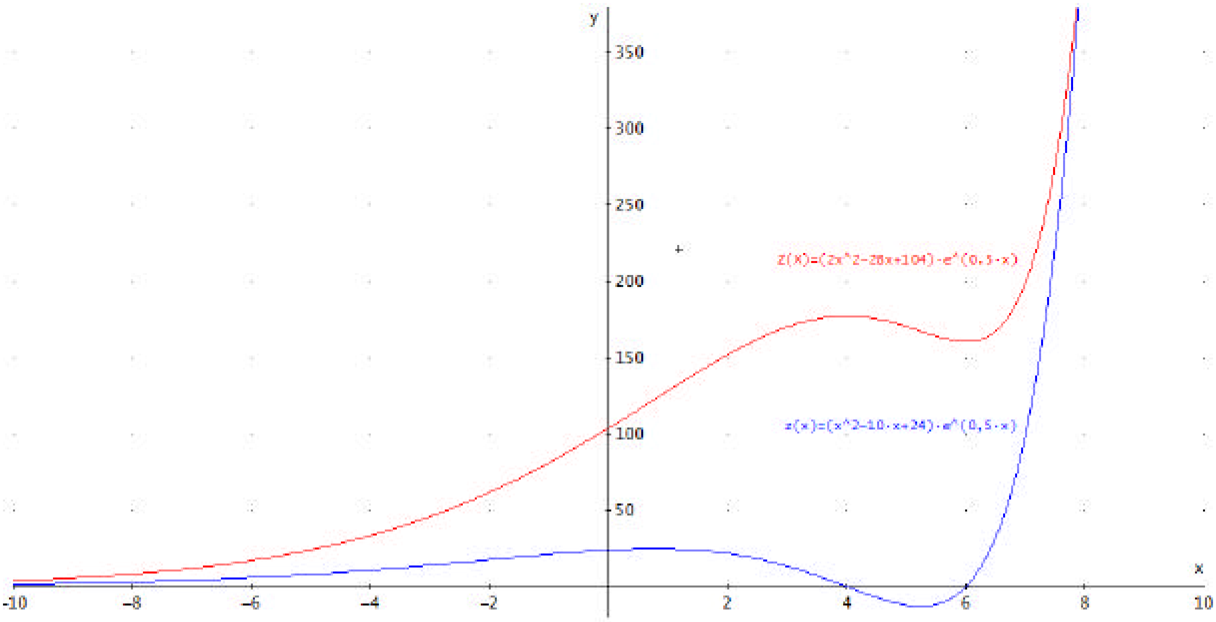
4. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die Zulaufrate am stärksten ändert.

5. Entscheiden Sie, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem sich im Becken wieder die Anfangswassermenge befindet. Die Begründung soll ohne Rechnung erfolgen.

6. In dem Stausee hat sich eine bestimmte Bakteriensorte eingelagert.
   Zum Zeitpunkt x = 0 befinden sich bereits 5000 Bakterien im Stausee.
   Die Wachstumsratenfunktion der Bakterien ist gegeben durch $w(x) = x^3 - 12x^2 + 35x$.
   Dabei wird x wieder in Tagen angegeben und w(x) in 10.000 Bakterien pro Tag.
   Ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien nach 3 Tagen.

Lösung

Die Funktion $z(x) = (x^2 - 10x + 24) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ beschreibt die Zulaufrate des Wassers in den Stausee gemessen in tausend Kubikmeter pro Tag. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion in einem größeren Bereich (blau), sowie die Stammfunktion (rot), die die Wassermenge im Stausee zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreibt.



1. Da eine negative Zulaufrate bedeutet, dass Wasser herausläuft, werden bei diesem Aufgabenteil die Nullstellen der Funktion z gesucht.

   $z(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10x + 24) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 4$ und $x_2 = 6$.

   Bis zum vierten Tag einschließlich fließt Wasser zu; am fünften und sechsten Tag fließt Wasser ab; nach dem sechsten Tag fließt wieder Wasser zu.

   <u>Zulauf</u> $0 < x \leq 4$ und $x > 6$ <u>Ablauf</u> $4 < x \leq 6$

2. <u>Bestimmung der inneren Extremstellen von z</u>

   Notwendige Bedingung: $z'(x) = 0$

   $$z'(x) = (2x - 10) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (x^2 - 10x + 24) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

   $$\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 4} = 3 \pm \sqrt{5}$$

   Aus dem Graphen geht hervor, dass die Lösung $3 - \sqrt{5}$ sein wird.

hinreichende Bedingung: $z'(x) = 0$ und $z''(x) \neq 0$

$$z''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$ ist gegeben

$$z''(3-\sqrt{5}) = \left(\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})^2 - \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) - 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}$$
$$= \left(\frac{1}{4}(9 - 6\sqrt{5} + 5) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}$$
$$= \left(\frac{9}{4} - \frac{6}{4}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})} = -\sqrt{5} \cdot e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})} < 0$$

Wegen $z(6{,}5) = 32{,}24 > 24{,}83 = z(3-\sqrt{5})$ ist die Zulaufrate allerdings am Rand des Intervalls bei x = 6,5 maximal.

3. Änderung der Wassermenge

$z(5) = (5^2 - 10 \cdot 5 + 24) \cdot e^{\frac{5}{2}} = -e^{2,5} < 0$. Zum Zeitpunkt x = 5 ist die Zulaufrate negativ, das heißt, dass aus dem Stausee Wasser herausläuft.

4. Stärkste Änderung der Zulaufrate

Notwendige Bedingung $z''(x) = 0$

$$z''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3$$

$x_2 = -2$ entfällt, weil es sich um eine Zeit handelt bzw. außerhalb des vorgegebenen Definitionsbereichs liegt.

Hinreichende Bedingung: $z''(x) = 0$ und $z'''(x) \neq 0$

$$z'''(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$ ist gegeben

$$z'''(4) = \left(\frac{1}{8} \cdot 4^2 + \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{3}{2}\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} = \left(2 + 1 - \frac{3}{2}\right) \cdot e^2 = \frac{3}{2}e^2 \neq 0$$

Es gilt $z'(6{,}5) = 93{,}49 > -14{,}78 = z'(4)$ stärkste Änderung am Rand des Intervalls.

Am stärksten fallen tut die Zulaufrate allerdings bei x = 4.

5. Die Fläche, die der Graph der Funktion z(x) mit der x-Achse einschließt, beschreibt die Wassermenge, die insgesamt in das Becken hinein- und herausgelaufen ist. Da die Fläche oberhalb der x-Achse größer ist als die Fläche unterhalb der x-Achse, bedeutet das, dass zur Anfangsmenge mehr Wasser zugelaufen als abgelaufen ist, also wird der Anfangszustand nicht wieder erreicht.

6. Zur Lösung der Aufgabe 6 verwende man folgenden Zusammenhang:

   Ist $w(x)$ mit $x \in [x_1; x_2]$ die momentane Änderungsrate einer Größe B und $B(x_1)$ der Bestand der Größe zum Zeitpunkt x_1, dann gilt für den Bestand der Größe zum Zeitpunkt x_2:

$$\boxed{B(x_2) = B(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx}$$

   Hier ist $B(x_1) = B(0) = 5000$ und $x_2 = 3$; w(x) in 10000 Bakterien pro Tag

$$B(3) = 5000 + 10000 \cdot \int_0^3 (x^3 - 12x^2 + 35x)dx = 5000 + 10000 \cdot \left(\frac{x^4}{4} - 4x^3 + \frac{35}{2}x^2 \right)\Big|_0^3$$
$$= 5000 + 10000 \cdot \left(\frac{3^4}{4} - 4 \cdot 3^3 + \frac{35}{2} \cdot 3^2 - 0 \right) = 5000 + 10000 \cdot \left(\frac{81}{4} - 4 \cdot 27 + \frac{35}{2} \cdot 9 \right)$$
$$= 702500$$

   Nach 3 Tagen sind 702500 Bakterien im Stausee.