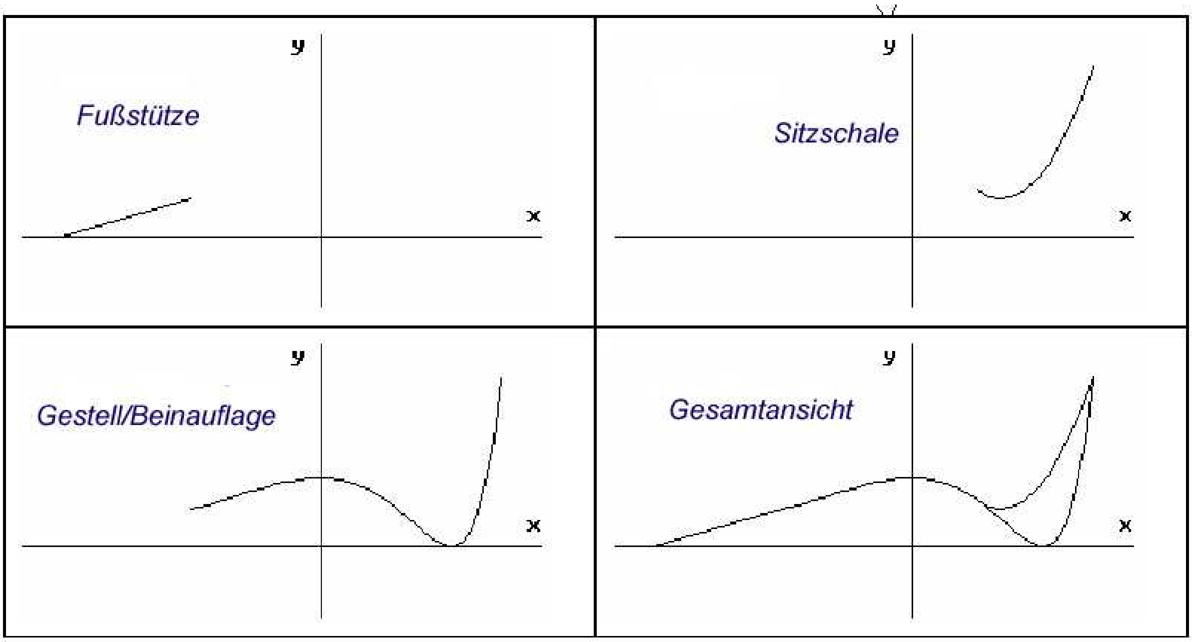
Aufg.-Nr.: 10	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR

Wellness-Liege

Im „WOLF-RENZ_DESIGN_ZENTRUM“ wird eine neue Generation an Wellness-Liegen entwickelt. Für das Topmodell „ABI 2006“ haben die Designer geschickt Ausschnitte aus verschiedenen Funktionsgraphen zusammengesetzt.



a) Die Fußstütze ergibt sich als Verlängerung (Teil der Tangente) an das Gestell/Beinauflage g, wobei für g die Gleichung $g(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x-2)^2$ gilt.

a1) Weisen Sie nach, dass für die 1. Ableitung von g gilt: $g'(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x^2 - 2x)$.

a2) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an g, wenn der Übergang an x = -2 erfolgt.

a3) Geben Sie den Bereich für x an, in dem die Tangente als Fußstütze genutzt werden kann.

b) Als Sitzschale haben die Designer einen Ausschnitt aus der Parabel s (2. Ordnung) gewählt. Dabei haben sie für s die Gleichung $s(x) = \frac{e}{4e-8}(x^2 - ex + 2e - 3)$ ermittelt.

b1) Zeigen Sie, dass die Graphen von g und s an der Stelle x = 1 knickfrei ineinander übergehen.

b2) Berechnen Sie die exakte Stelle des tiefsten Punktes der Sitzschale. (Rechnungen mit e, keine Rundungen)

c) Für die seitliche Verblendung des Bereichs zwischen Fußstütze, Gestell/Beinauflage und Erdboden (x-Achse) sollen spezielle bebürstete Aluminiumbleche zum Einsatz kommen, die aus rechteckigen Blechen herausgeschnitten werden. Hier gilt: $1LE$ entspricht 0,25m.

c1) Geben Sie mit Hilfe einer Schraffur die beschriebene Fläche in der Gesamtansicht an.

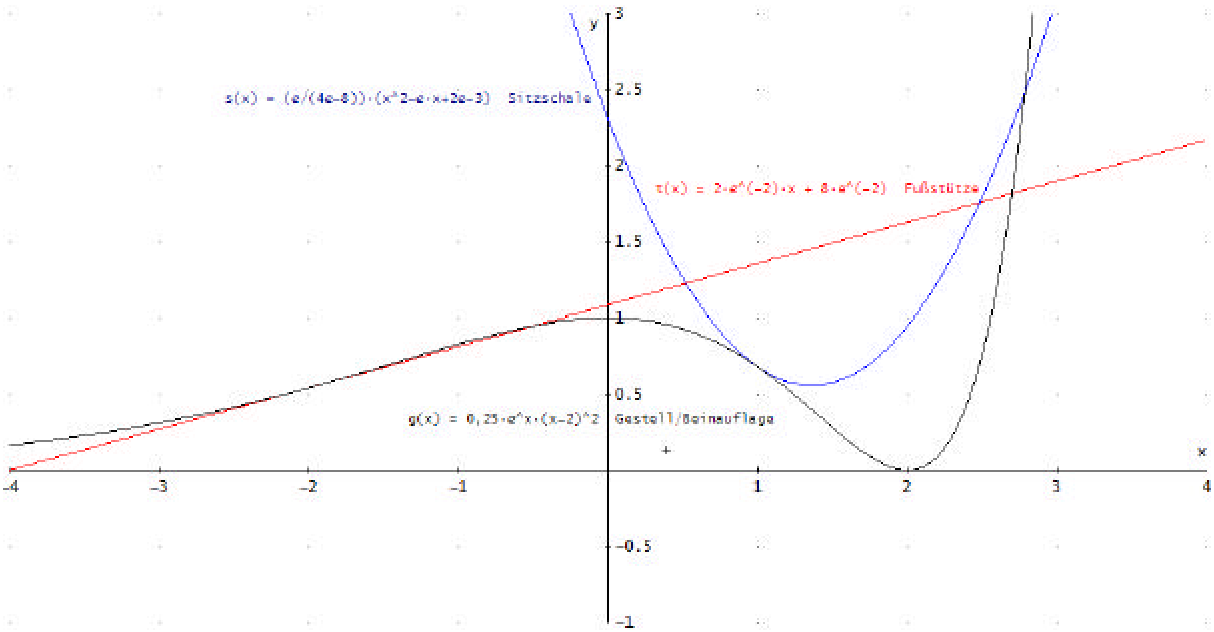
c2) Ermitteln Sie die Mindestlänge und die Mindestbreite, die das rechteckige Blech aufweisen muss.

c3) Eine Stammfunktion der Funktion g lautet:

$$G(x) = \frac{1}{4} e^x \cdot (x^2 - 6x + 10)$$

Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines fertig ausgeschnittenen Verblendungsblechs in m^2.

Lösung



Die Abbildung zeigt die drei in der Aufgabe betrachteten Graphen.

a1) Mit der Produkt- und Kettenregel folgt

$$g'(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x \cdot (x-2)^2 + \frac{1}{4} \cdot e^x \cdot 2 \cdot (x-2) = \frac{1}{4} \cdot e^x \cdot (x^2 - 4x + 4 + 2x - 4) = \frac{1}{4} \cdot e^x \cdot (x^2 - 2x)$$

a2) $m = g'(-2) = 2 \cdot e^{-2}$ und $g(-2) = 4 \cdot e^{-2}$ $\qquad \Rightarrow t(x) = 2 \cdot e^{-2} \cdot x + 8 \cdot e^{-2}$

a3) Die Fußstütze ist sinnvoll im Bereich zwischen dem Erdboden und dem Berührpunkt mit dem Graphen von g, also zwischen $t(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ und $x = -2$.

Bereich: $-4 \leq x \leq -2$

b1) Knickfrei bedeutet: $g(1) = s(1)$ und $g'(1) = s'(1)$

$$s'(x) = \frac{e}{4e-8} \cdot (2x - e) = \frac{e}{4(e-2)} \cdot (2x - e)$$

$$s'(1) = \frac{e}{4(e-2)} \cdot (2 - e) = -\frac{e}{4(e-2)} \cdot (e-2) = -\frac{e}{4} = g'(1)$$

$$s(1)=\frac{e}{4(e-2)}\cdot(1-e+2e-3)=\frac{e}{4(e-2)}\cdot(-2+e)=\frac{e}{4}=g(1)$$

b2) notwendige Bedingung: $s'(x)=0$

$$\frac{e}{4e-8}\cdot(2x-e)=0 \Leftrightarrow 2x-e=0 \Leftrightarrow x=\frac{e}{2}$$

hinreichende Bedingung $s'(x)=0$ und $s''(x)\neq 0$

$s''(x)=\frac{e}{4e-8}\cdot 2=\frac{e}{2e-4}>0$ für alle x, also auch für $x=\frac{e}{2}$ $\Rightarrow$ Tiefpunkt

$$s\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{e}{4(e-2)}\cdot\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2-e\cdot\left(\frac{e}{2}\right)+2e-3\right)=\frac{e}{4(e-2)}\cdot\left(\frac{e^2}{4}-\frac{e^2}{2}+2e-3\right)$$
$$=\frac{e}{4(e-2)}\cdot\left(-\frac{e^2}{4}+2e-3\right)=\frac{e}{16(e-2)}\cdot(e^2-8e+12)=\frac{e}{16(e-2)}\cdot(e-2)\cdot(e-6)$$
$$=\frac{e}{16}\cdot(e-6)=\frac{e^2}{16}-\frac{3e}{8}$$

$$\Rightarrow\quad TP\left(\frac{e}{2};\frac{e^2}{16}-\frac{3e}{8}\right)$$

c1) Es handelt sich um die Fläche zwischen x – Achse und den Graphen von g und t.

c2) $x=-4$ ist die Nullstelle von t (vergleiche a3))

$g(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ist Nullstelle von g

$g(0)=1$ ist der Schnittpunkt des Graphen von g mit der y-Achse.

Das Rechteck hat eine Mindestlänge von $6\cdot 0{,}25m=1{,}5m$ und eine Mindestbreite von $1\cdot 0{,}25m=0{,}25m$

c3) Die Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche unterhalb der Tangente im Bereich von -4 bis -2 und der Fläche unterhalb des Graphen von g von -2 bis 2.

$$A=A_{Dreieck}+A_{G_g}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot e^{-2}+G(2)-G(-2)$$
$$=4\cdot e^{-2}+\frac{1}{4}e^2\cdot(4-12+10)-\frac{1}{4}e^{-2}\cdot(4+12+10)$$
$$=4e^{-2}+\frac{1}{2}e^2-\frac{13}{2}e^{-2}=\frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}e^{-2}\approx 3{,}4$$

$$3{,}4\cdot 0{,}25m^2=0{,}85m^2$$