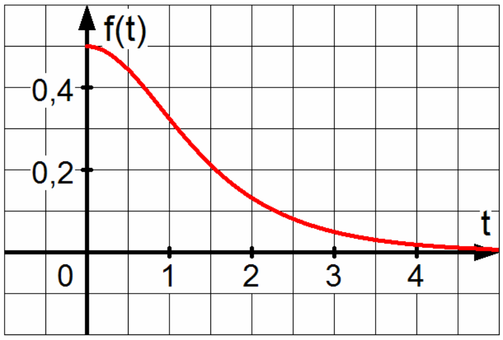
Aufg.-Nr.: 14	Bereich: e-Funktion	Kursart: LK	WTR

Fischbestand



Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch eine Funktion f mit

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}; \qquad t \geq 0$$

beschrieben (t in Jahren seit Untersuchungsbeginn, f(t) in Millionen pro Jahr). Obige Abbildung zeigt den Graphen von f.

a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.
($f''(t) = \frac{e^t(1-4e^t+e^{2t})}{(1+e^t)^4}$ kann ohne eigene Herleitung benutzt werden.)

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$.

c) (i) Weisen Sie nach, dass f für $t > 0$ monoton abnimmt.
(ii) Entscheiden Sie, ob dies bedeutet, dass der Fischbestand abnimmt.

d) Leiten Sie durch Integration her, dass

$$F(t) = \frac{-1}{e^t+1}$$

eine Stammfunktion von f ist.

e) (i) Begründen Sie, warum der Bestand der Fische B(t) durch

$$B(t) = B(0) + \int_0^t f(x)dx$$

beschrieben wird.
(ii) Ermitteln Sie, welcher Fischbestand nach 2 Jahren zu erwarten ist.
(iii) Ermitteln Sie, welcher Fischbestand langfristig zu erwarten ist.

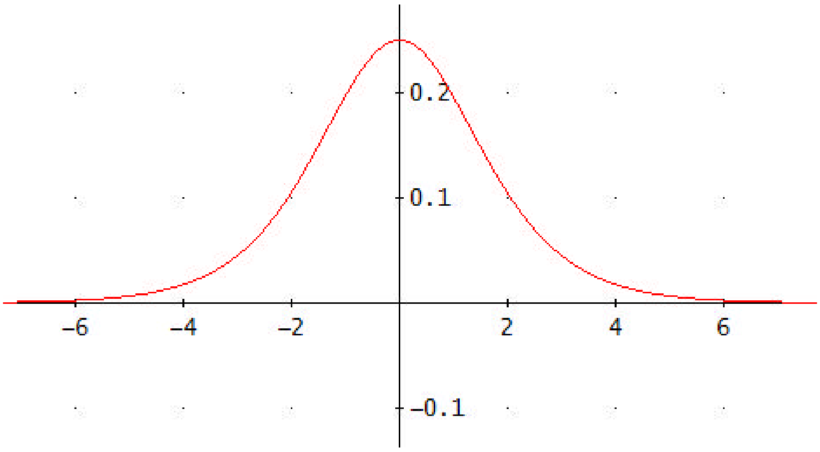
Kommentar:
Die Aufgabe basiert größtenteils auf einer Aufgabe zur Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg), Wahlteil: Analysis I 3.

Lösung

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$$

Die Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen auch für t < 0

(ACHTUNG: Fehler bei der Aufgabenstellung: falsche Skalierung der y-Achse)



a) Nullstellen

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = 0 \Leftrightarrow e^t = 0 \Rightarrow \text{ Es gibt keine Nullstellen, weil } e^t \neq 0 \text{ für alle t.}$$

Extrema

Mit der Quotientenregel folgt:

$$f'(t) = \frac{e^t \cdot (1+e^t)^2 - e^t \cdot 2 \cdot (1+e^t) \cdot e^t}{(1+e^t)^4} = \frac{e^t(1+e^t) - 2e^{2t}}{(1+e^t)^3} = \frac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3}$$

notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$

$$e^t(1-e^t) = 0$$

Wegen $e^t \neq 0$ für alle t, folgt also $1 - e^t = 0 \Leftrightarrow e^t = 1 \Leftrightarrow t = \ln 1 = 0$

hinreichende Bedingung: $f'(t)=0$ und $f''(t)\neq 0$

Herleitung der zweiten Ableitung als Zusatz:

$$f''(x)=\frac{(e^t-2e^{2t})\cdot(1+e^t)^3-e^t(1-e^t)\cdot 3\cdot(1+e^t)^2\cdot e^t}{(1+e^t)^6}$$
$$=\frac{e^t(1-2e^t)(1+e^t)-3e^{2t}(1-e^t)}{(1+e^t)^4}=\frac{e^t(1+e^t-2e^t-2e^{2t}-3e^t+3e^{2t})}{(1+e^t)^4}$$
$$=\frac{e^t(1-4e^t+e^{2t})}{(1+e^t)^4}$$

$f''(0)=-\frac{1}{8}<0\Rightarrow HP(0\,|\,f(0))$, also $HP\left(0\,|\,\frac{1}{4}\right)$

Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f''(t)=0$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow e^t(1-4e^t+e^{2t})=0$$
$$\Rightarrow 1-4e^t+e^{2t}=0$$

Mittels der Substitution $u=e^t$ erhält man die quadratische Gleichung

$$u^2-4u+1=0\Rightarrow u_{1,2}=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow t_1=\ln(2+\sqrt{3})\approx 1{,}32 \text{ und } t_2=\ln(2-\sqrt{3})\approx -1{,}32$$

t_2 entfällt, weil $t\geq 0$ nach Voraussetzung

hinreichende Bedingung: $f''(t)=0$ und $f'''(t)=0$

Da die gefundene Nullstelle keine Definitionslücke von f'' ist, reicht es für die hinreichende Bedingung den Zähler von f'' abzuleiten und die Nullstelle dort einzusetzen.

$$z(t)=e^t-4e^{2t}+e^{3t}\Rightarrow z'(t)=e^t-8e^{2t}+3e^{3t}$$
$$z'(\ln(2+\sqrt{3}))=2+\sqrt{3}-8(2+\sqrt{3})^2+3(2+\sqrt{3})^3=(2+\sqrt{3})(1-16-8\sqrt{3}+12+12\sqrt{3}+9)$$
$$=(2+\sqrt{3})(4\sqrt{3}+6)=14\sqrt{3}+24\neq 0$$

$WP\left(\ln(2+\sqrt{3})\,|\,\frac{2+\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})^2}\right)$ oder gerundet $WP(1{,}32\,|\,0{,}17)$

b) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e^t}{e^t\left(\dfrac{1}{e^t}+2+e^t\right)} = 0$

c) (i) Zu zeigen ist, dass $f'(t) < 0$ für t > 0

$f'(t) = \dfrac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3}$; Der Nenner ist immer größer Null für t > 0

Für t > 0 ist $e^t > 1$, das bedeutet $1-e^t < 0$ für t >0. Damit ist $f'(t) < 0$ und somit f monoton fallend für t > 0.

(ii) f stellt nicht den Fischbestand dar, sondern die Änderungsrate und diese ist für $t \geq 0$ positiv, der Bestand nimmt also zu, er wächst allerdings mit zunehmender Zeit langsamer.

d) Zu berechnen ist $\int \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt$

Setze $u = e^t \Rightarrow du = e^t dt$

$\int \dfrac{du}{(1+u)^2} = -\dfrac{1}{1+u} + C$

also ist $F(t) = \dfrac{-1}{e^t+1}$ eine Stammfunktion von f .

e) (i) Zur Lösung der Aufgabe (i) verwende man folgenden Zusammenhang:

Ist $w(x)$ mit $x \in [x_1; x_2]$ die momentane Änderungsrate einer Größe B und $B(x_1)$ der Bestand der Größe zum Zeitpunkt x_1, dann gilt für den Bestand der Größe zum Zeitpunkt x_2:

$$\boxed{B(x_2) = B(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx}$$

(ii) $B(t) = B(0) + \int_0^t f(x)dx$

B(0) = 4 Anfangszustand in Millionen Fischen

$B(2) = 4 + \int_0^2 f(x)dx = 4 + (F(2) - F(0)) \approx 4{,}38$

Zwei Jahre nach Beginn der Untersuchung sind etwa 4,38 Millionen Fische im See zu erwarten.

(iii) $B(t) = B(0) + \int_0^t f(x)dx = 4 + \left(\frac{-1}{e^x+1}\right)\Big|_0^t = 4 + \left(\frac{-1}{e^t+1}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right) = 4{,}5 - \frac{1}{e^t+1}$

$$\lim_{t\to\infty}\left(4{,}5 - \frac{1}{e^t+1}\right) = 4{,}5$$

Langfristig ist ein Bestand von 4,5 Millionen Fischen im See zu erwarten.

