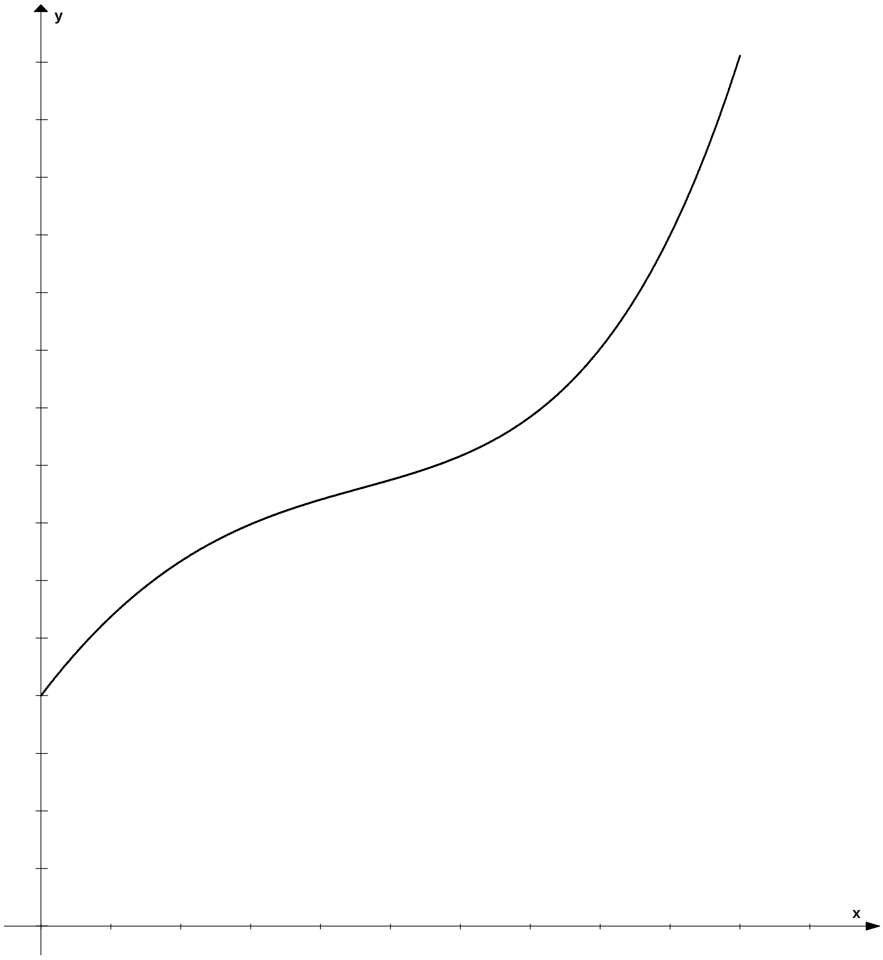
Aufgabe 2 Wetterstation

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

In einer Wetterstation wird die Aufzeichnung eines Niederschlagmessgeräts vom Vortag (im Zeitraum von 0 Uhr bis 20 Uhr) ausgewertet. Das Regenmessgerät besteht aus einem nach oben offenen zylinderförmigen Gefäß mit einer Grundfläche von 1 m^2. Die Wassermenge wird vom Gerät automatisch aufgezeichnet.

Es folgt eine Aufzeichnungsskizze der Wetterstation. Der Graph zeigt die Wassermenge im Gefäß in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden (x-Achse: 1 Einheit entspricht 2 Stunden).



a) Interpretieren Sie den Graphen im Hinblick auf folgende Fragen für den Zeitraum von 0 bis 20 Uhr:
Wann hat es geregnet?
In welchem Zeitraum hat es stark, in welchem Zeitraum schwach geregnet?

Die Niederschlagsmenge wird in Millimetern oder aber in Litern pro Quadratmeter angegeben.

b) Zeigen Sie, dass die aufgefangene Niederschlagsmenge von 1 Liter Wasser ein Ansteigen des Wasserstands im Gefäß von 1mm bedeutet.
(Dieses Messgerät ermöglicht also beide Angaben für die Niederschlagsmenge.)

Die Kurve in der Aufzeichnungsskizze der Wetterstation entspricht dem Graphen der Funktion *f* mit

$$f(x)=80e^{0,1x}-x^2-40\text{, für } x\in [0;20].$$

c) Tragen Sie die fehlenden Skalen auf den Achsen ein.
Berechnen Sie, wie viele Liter Wasser zwischen 0 und 20 Uhr in das Gefäß gefallen sind.
Zeichnen Sie die Gerade durch den Anfangs- und Endpunkt der Kurve und interpretieren Sie die Bedeutung dieser Geraden im Sachzusammenhang der Aufgabe.

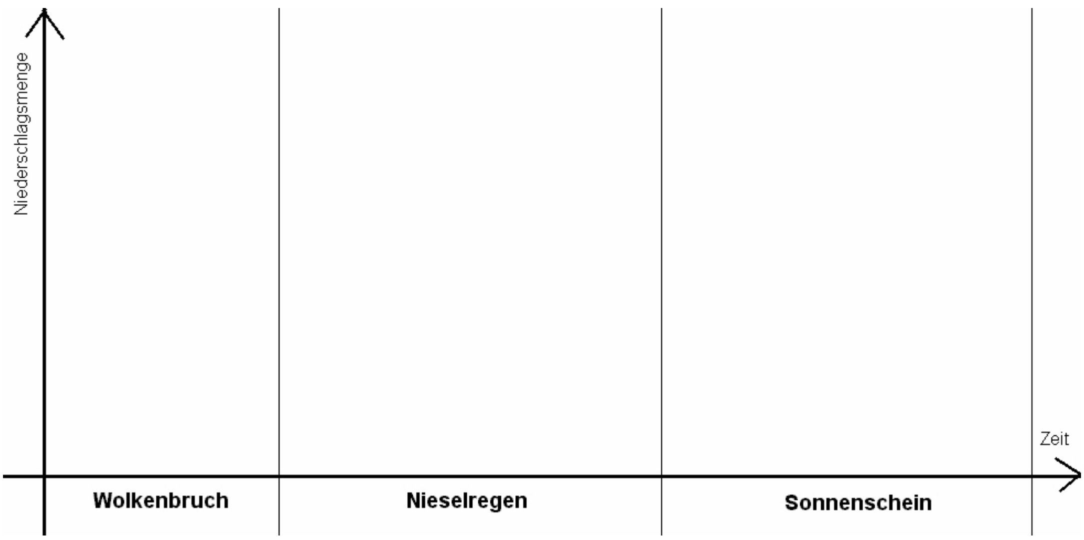
d) Untersuchen Sie *f* auf Wendestellen im betrachteten Intervall.

e) Interpretieren Sie die Bedeutung der 1. Ableitung und die Bedeutung der Wendestelle im Sachkontext der Aufgabe.

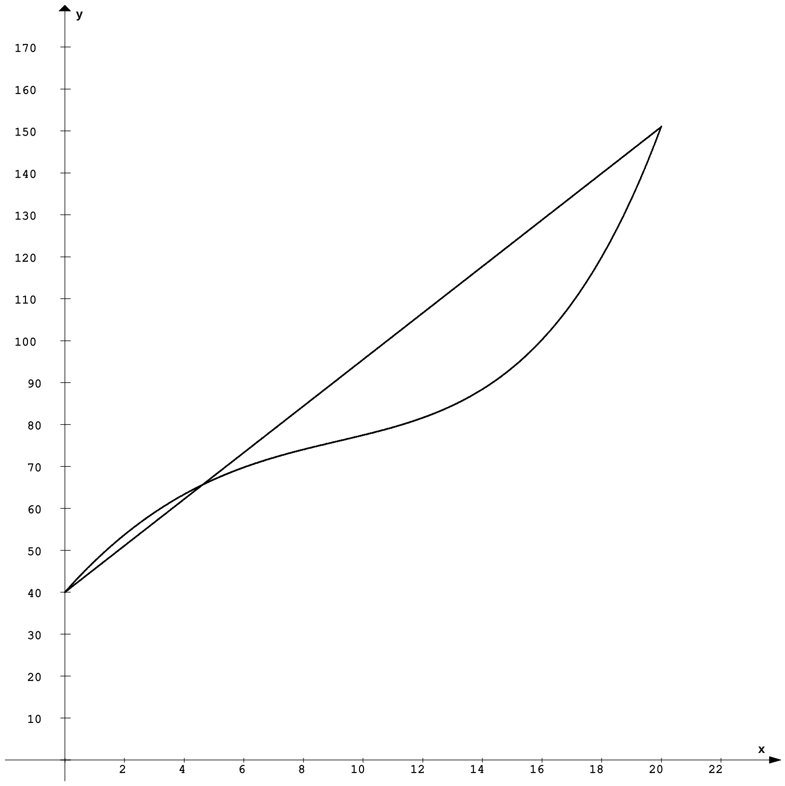
f) Wie könnte man den Begriff „momentane Regenstärke" definieren. Wie stark hat es nach ihrer Definition um 18 Uhr geregnet? Wie groß war die minimale momentane Regenstärke? Geben Sie dazu auch eine sinnvolle Maßeinheit an.
Berechnen Sie auch mit Hilfe der Integralrechnung die mittlere Regenstärke in dem betrachteten Zeitintervall von 0 bis 20 Uhr. Beachten Sie, dass man dabei nicht ernsthaft rechnen muss.

g) Skizzieren Sie in der nachfolgenden Darstellung den prinzipiellen Verlauf des Graphen für die Aufzeichnung eines Niederschlagsmessgerätes, der folgende Wettersituation hinsichtlich der Niederschlagsmenge beschreibt:

Wolkenbruch – Nieselregen – Sonnenschein bei wolkenlosem Himmel.
(Ablauf in der angegebenen Reihenfolge und ohne zeitliche Unterbrechungen)



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Aufzeichnung zeigt, dass es während des gesamten Zeitraumes geregnet hat, weil der Graph streng monoton ansteigt (auf keinem Intervall konstant ist). Es hat ab dem frühen Nachmittag immer stärker geregnet, da der Graph im letzten Teil stark steigt. Wenig geregnet hat es von etwa 4 Uhr bis etwa 14 Uhr; auf diesem Intervall steigt der Graph schwach.	10	5	
b)	Ein Zylinder mit einer Grundfläche von 1 m^2 = 10 000 cm^2 und dem Volumen 1l = 1 000 cm^3 hat die Höhe $h = \frac{1000}{10000}$ cm = 0,1 cm = 1 mm.	5		
c)	 <u>Berechnung der Wassermenge:</u> $f(0)=80-40=40$; der Anfangspunkt ist der Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0\,\vert\,40)$. $f(20)=80e^2-400-40\approx 151{,}124$; der Endpunkt der Kurve ist (20|151). Insgesamt sind im Beobachtungszeitraum 151 – 40 = 111 Liter Regen gefallen. *Die Bedeutung der Geraden kann unterschiedlich interpretiert werden.* Mögliche Antworten: Die Steigung der Geraden gibt die durchschnittliche Regenstärke während des gesamten Zeitraumes an. Wäre die Gerade die vom Messgerät aufgezeichnete Kurve, hätte es im gesamten Beobachtungszeitraum gleichmäßig stark geregnet.	10	5	5

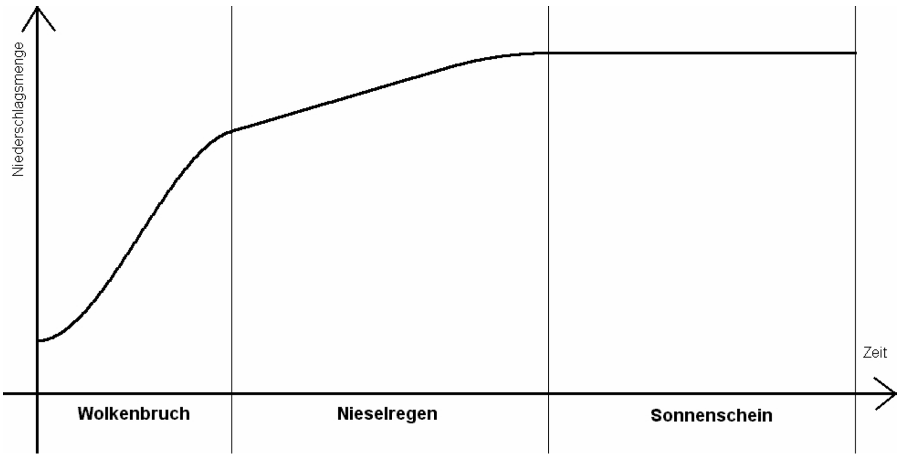
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Bestimmung der Wendestelle: Es gilt: $f'(x) = 8e^{0,1x} - 2x$ $f''(x) = 0,8e^{0,1x} - 2$ Für $f''(x)=0$ gilt: $0,8e^{0,1x} = 2 \Leftrightarrow e^{0,1x} = 2,5 \Leftrightarrow 0,1x = \ln(2,5) \Leftrightarrow x = 10 \cdot \ln(2,5) \approx 9,163$ Nachweis der Wendestelle durch Argumentation mit der grafischen Darstellung bzw. über die 3. Ableitung: $f'''(x) = 0,08e^{0,1x}$. Die Wendestelle liegt bei $x \approx 9,2$.		20	
e)	Die erste Ableitung gibt die Stärke des Regens zum jeweiligen Zeitpunkt an. In der Wendestelle hat die erste Ableitung eine Extremstelle, im Fall der gegebenen Funktion eine Minimalstelle. Dies bedeutet, dass der Regen kurz nach 9 Uhr am schwächsten war.			10
f)	Wir definieren – entsprechend e) – die Werte der ersten Ableitung als „momentane Regenstärke“ zu den entsprechenden Zeitpunkten. Es gilt: $f'(18) \approx 12,4$. Die zugehörige – hier passende – Maßeinheit ist mm pro Stunde [$\frac{\text{mm}}{\text{h}}$]. Um 18 Uhr betrug die momentane Regenstärke also 12,4 $\frac{\text{mm}}{\text{h}}$. Um 9.12 Uhr war nach e) die momentane Regenstärke minimal. Einsetzen dieses Wertes in f' ergibt: $f'(9,2) \approx 1,7$, Um 9.12 Uhr betrug die Regenstärke nur 1,7 $\frac{\text{mm}}{\text{h}}$. Mit einer Betrachtung der „mittleren Regenstärke“ schließt sich der Kreis: Schon in der Antwort zu c) haben wir die Steigung der Geraden, also den Quotienten $\frac{f(20)-f(0)}{20-0} \approx \frac{111}{20} = 5,55$ als mittlere Regenstärke interpretiert. Diese Rechnung entspricht einer Grundvorstellung (ohne Differential- und Integralrechnung), die sich nur auf die gefallene Regenmenge – also auf die Funktion *f* – bezieht. Allgemein kann man den Mittelwert einer beliebigen stetigen (integrierbaren) Funktion *g* auf einem Intervall [*a* ; *b*] sinnvoll durch $\frac{\int_a^b g(x)dx}{b-a}$ definieren.			

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td>
In unserem Fall beziehen wir diesen Ansatz auf die momentane Regenstärke,
also auf die Funktion f'. So gesehen muss dann also $\frac{\int_0^{20} f'(x)dx}{20-0}$ berechnet werden.

Nun ist aber f eine Stammfunktion von f', es muss also tatsächlich wieder nur $\frac{f(20)-f(0)}{20} \approx 5{,}55$ berechnet werden.

Die mittlere Regenstärke im Zeitraum von 0 bis 20 Uhr betrug also auch in dieser Interpretation etwa 5,55 $\frac{\text{mm}}{\text{h}}$.

<u>Bemerkung:</u> Diese Aufgabe ist besonders gut geeignet, Grundvorstellungen der Differential- und Integralrechnung herauszuarbeiten, und sie macht auch den Hauptsatz besonders anschaulich.

Da ausdrücklich in der Aufgabenstellung f) auf die Integralrechnung verwiesen wird, sollte eine Antwort, in der nur der schon in c) betrachtete Quotient berechnet wird, in der Bewertung nur eine Teilpunktzahl ergeben.
</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>
Beispiel:


Wolkenbruch: stark ansteigende Kurve
Nieselregen: schwach ansteigende Kurve
Sonnenschein: Kurve hat die Steigung 0.

Es wird nicht erwartet, dass keine Knicke im Graphen auftreten(Stetigkeit der Regenstärke) und dass der Graph in der Wolkenbruchphase einen Wendepunkt hat, aber der gesamte Graph sollte bis zum Sonnenschein streng monoton steigen, insgesamt in der Wolkenbruchphase steiler sein als in der Nieselregenphase, beim Nieselregen annähernd linear sein und natürlich in der Sonnenscheinphase konstant sein.
</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>