Aufgabe 8: Kondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus einem Paar gleichgroßer Metallplatten, die voneinander isoliert in einem festen Abstand montiert sind.
Verbindet man die beiden Platten je mit einem Pol einer Batterie, so lässt die Batterie Strom fließen, so dass sich die beiden Kondensatorplatten unterschiedlich aufladen. Dadurch wächst seinerseits die Spannung zwischen den Kondensatorplatten, so dass die Batterie gegen diese Spannung am Kondensator immer weniger Strom fließen lassen kann.
Während die Batterie immer eine konstante Spannung U_0 liefert, ist die Spannung am Kondensator zeitabhängig: Sie lässt sich durch eine Spannungs-Funktion $U(t)$ beschreiben. Diese Funktion hat dabei die Gleichung

$$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \ .$$

Die Zeit t ist eine positive reelle Zahl (Es wird ab dem Augenblick des Einschaltens gezählt).
U_0 ist die Batteriespannung,
τ ist eine für den Kondensator charakteristische Größe.
Natürlich tragen U und t auch Einheiten (die Spannung U wird in Volt gemessen, die Zeit t in Sekunden), dies soll aber in dieser Aufgabe unberücksichtigt bleiben.

a) Skizzieren Sie den Graphen von $U(t)$ für $U_0 = 10$ und $\tau = 2$ im Intervall $0 \le t \le 10$.
Berechnen Sie den Zeitpunkt t, bei dem am Kondensator 90% der Batteriespannung U_0 herrschen.

b) Begründen Sie, warum die Funktion U den oben angeführten Vorgang sinnvoll beschreibt: Gehen Sie dabei besonders auf das Wachstum von U und die Grenze dieses Wachstums ein.

c) Bestimmen Sie die Änderung der Spannung am Kondensator im Moment des Einschaltens (also bei $t = 0$).
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Schnittpunkt der Tangente an die Spannungs-Funktion an dieser Stelle die Gerade $y = U_0$ immer bei $t = 1\tau$ schneidet.

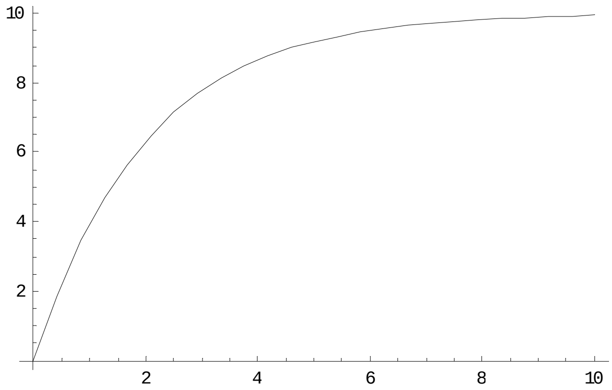
Wie schon anfangs erläutert, lässt die Batterie Strom fließen und lädt damit den Kondensator auf. Dabei gilt: Die Stromstärke $I(t)$ ist umso höher, je geringer die Spannung am Kondensator ist; sollte die Spannung am Kondensator die Batteriespannung erreicht haben, so kann die Batterie keinen Strom mehr fließen lassen. Die Anfangs-Stromstärke heißt I_0.
Die Stromstärke-Funktion hat die Funktionsgleichung $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ mit den bekannten Größen.

d) Begründen Sie wiederum, warum diese Funktion den Vorgang sinnvoll beschreibt.
Berechnen Sie (für $\tau = 2$) den Zeitpunkt, bei dem die Stromstärke nur noch 10 % ihres anfänglichen Wertes aufweist.

e) Die Menge an Ladung Q, die die Batterie bis zu einem Zeitpunkt t auf den Kondensator hat fließen lassen, wird durch die Fläche zwischen dem Graphen von $I(t)$ und der Zeit-Achse (bis zum jeweiligen Zeitpunkt) dargestellt.
Geben Sie die Gleichung der Funktion Q an.
Berechnen Sie (für $\tau = 2$ und $I_0 = 2$) die Ladung auf dem Kondensator bei $t = 2\tau$.
Bestimmen Sie die maximale Ladung, die der Kondensator bei dieser Anfangsstromstärke I_0 aufnehmen kann.

f) Schließlich:
Der Widerstand eines elektrischen Geräts ist der Quotient aus Spannung und Stromstärke: $R = \dfrac{U}{I}$.
Dies gilt selbstverständlich auch für Kondensatoren.
Beurteilen Sie, wie sich der Widerstand eines Kondensators mit der Zeit ändert.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Es muss gelten: $0{,}9 = \frac{U(t)}{U_0} = 1 - e^{-t/2} \quad \Leftrightarrow \quad t = -2 \cdot \ln 0{,}1$. Damit ergibt sich $t \approx 4{,}605s$.	15	5	
b)	Die Beschreibung des Vorgangs liefert: • Die Spannung am Kondensator wächst ständig. • Sie kann aber höchstens den Wert der Batteriespannung (also U_0) annehmen. • Das Wachstum wird immer langsamer und nähert sich dem Endwert an. Die gegebene Funktion U erfüllt diese Kriterien: • Da der Term $e^{-t/\tau}$ monoton mit wachsenden t kleiner wird, wächst der Term $(1-e^{-t/\tau})$ monoton. • Da der Term $e^{-t/\tau}$ für wachsendes t gegen Null geht, geht der Term $(1-e^{-t/\tau})$ für wachsendes t gegen 1. Also geht der Funktionsterm $U_0 \cdot (1-e^{-t/\tau})$ gegen U_0. • Da der Term $e^{-t/\tau}$ für wachsendes t immer langsamer fällt, steigt der Term $(1-e^{-t/\tau})$ für wachsendes t immer langsamer. Also geht der Funktionsterm $U_0 \cdot (1-e^{-t/\tau})$ immer langsamer gegen U_0. *Bemerkung: Die Beschreibung des Vorgangs sagt nicht, dass die Änderungsrate der beschreibenden Funktion proportional zum Abstand vom Endwert ist. Insofern ist aus der Beschreibung die Funktion nicht eindeutig zu gewinnen. Aber dies ist auch nicht gefordert – es ist lediglich gefordert, zu zeigen, dass die Funktion die angegebenen Eigenschaften wiedergibt.*		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Der Wert der (zeitlichen) Änderung der Spannung ist der Wert der Ableitung der Funktion U zu dem entsprechenden Zeitpunkt. Da im angegebenen Fall $U'(t) = 5 \cdot e^{-t/2}$, ergibt sich $U'(0) = 5$. Allgemein gilt $U'(t) = \frac{U_0}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$ und damit $U'(0) = \frac{U_0}{\tau}$. Die Tangente an die U – Funktion bei $t = 0$ geht durch den Ursprung und hat die Steigung $U'(0)$. Damit hat sie die Gleichung $tg(t) = \frac{U_0}{\tau} \cdot t$, und diese Funktion erreicht den Wert U_0 bei $t = 1\tau$.. *Hinweis: Dass in der Physik üblicherweise die zeitliche Ableitung mit* $\dot{U}$ statt mit U' *dargestellt wird, kann hier nicht erwartet werden. Ebenso muss unberücksichtigt bleiben, dass* U' *eben keine Spannung ist, sondern eine Spannungsänderung, die die Einheit 1 V/s trägt.*		15	
d)	Die Beschreibung des Vorgangs liefert: • Die Stromstärke sinkt, von einem Anfangswert beginnend, ständig. • Die Stromstärke ist an die Spannung am Kondensator so gekoppelt, dass sie direkt von der Differenz Kondensatorspannung – Batteriespannung abhängt. • Wenn $U(t) = U_0$, ist die Stromstärke Null. Die gegebene Stromstärke-Funktion erfüllt diese Bedingungen: • Eine Exponential-Funktion mit negativem Exponenten für positive Argumente fällt monoton und geht für wachsende Argumente gegen Null. • Die gegebene Funktion lässt die Stromstärke sogar proportional zur Differenz Kondensatorspannung – Batteriespannung sein. *Bemerkung: Diese Proportionalität ist in der Beschreibung nicht gefordert – die Beschreibung spricht nur von je – desto. Sie liegt aber nahe, wird normalerweise unmittelbar angenommen und ist auch physikalisch korrekt.* Für den Zeitpunkt $t_{0,1}$, zu dem die Stromstärke auf 10 % ihres Anfangswertes abgefallen ist, muss gelten: $e^{-t_{0,1}/2} = \frac{I(t_{0,1})}{I_0} = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad t_{0,1} = -2 \cdot \ln 0{,}1 \approx 4{,}605$.		15	
e)	Die Aufgabe führt die Funktion Q als Integralfunktion ein: $Q(t) = \int_0^t I(h)dh$. Mit der bekannten Stromstärke-Funktion ergibt sich $\int I(t)dt = -I_0 \cdot \tau \cdot e^{-t/\tau} + c_0$ und damit mit den gegebenen Werten $Q(t) = 4 - 4e^{-t/2} = 4 \cdot (1 - e^{-t/2})$. Der Wert der gefragten Ladung ergibt sich als $Q(4)$: $Q(4) = 4 \cdot (1 - e^{-2}) \approx 3{,}569$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die maximal aufnehmbare Ladung ist der Wert für $Q(t)$, der sich ergibt, wenn man t über alle Grenzen wachsen lässt. Wenn t immer größer wird, so wird $e^{-t/2}$ immer kleiner und konvergiert gegen Null. Also ist der gesuchte Wert für die maximale Ladungsmenge $Q_{\max} = 4$. *Bemerkung: Diese Argumentation ist auch ohne eine streng formale Einführung des Begriffs des uneigentlichen bestimmten Integrals durchführ- und nachvollziehbar.*	5	10	5
f)	Mit $U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$, $I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$ sowie $R = \frac{U}{I}$ ergibt sich $R(t) = \frac{U_0(1 - e^{-t/\tau})}{I_0 e^{-t/\tau}} = \frac{U_0}{I_0} \cdot (e^{t/\tau} - 1)$. Diese Funktion beginnt bei $t = 0$ mit $R(0) = 0$, steigt streng monoton und verhält sich für große t-Werte wie eine Exponentialfunktion. Also: Beim Einschalten hat der Kondensator praktisch überhaupt keinen Widerstand. Während des Aufladens wächst der Widerstand des Kondensators stetig und steigt schließlich exponentiell an.			15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20