Aufgabe 9: Radioaktiver Zerfall

Beim radioaktiven Zerfall einer Substanz S_1 beschreibt $m_1(t)$ die Masse der noch nicht zerfallenen Substanz zum Zeitpunkt t mit $m_1(t)$ in mg und t in Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Dabei gilt: $m_1(t) = 100 \cdot e^{-0,5t}$.

a) Geben Sie an, wie groß die Masse der Substanz S_1 am Beobachtungsbeginn war.
Berechnen Sie die Halbwertszeit dieses Zerfalls, d.h. die Zeit, nach der nur noch die Hälfte der ursprünglichen Substanz vorhanden ist.
Bestimmen Sie die nach 6 Stunden bereits zerfallene Masse.

Das Zerfallsprodukt der radioaktiven Substanz S_1 ist die Substanz S_2. Auch diese Substanz ist radioaktiv und zerfällt demzufolge weiter. Für die Masse $m_2(t)$ der noch nicht zerfallenen Substanz S_2 gilt dann:

$$m_2(t) = 100 \cdot e^{-0,5t} \cdot (1 - e^{-0,5t})$$

b) Berechnen Sie, wie viel an Substanz S_2 zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhanden ist und interpretieren Sie dieses Ergebnis.
Begründen Sie, dass es zu einem gewissen Zeitpunkt eine maximale Masse der Substanz S_2 geben muss und berechnen Sie den Zeitpunkt und die zugehörige Menge.

c) Zeichnen Sie die Graphen von m_1 und von m_2 in ein Koordinatensystem ein.

d) Gegeben ist die Funktion g durch

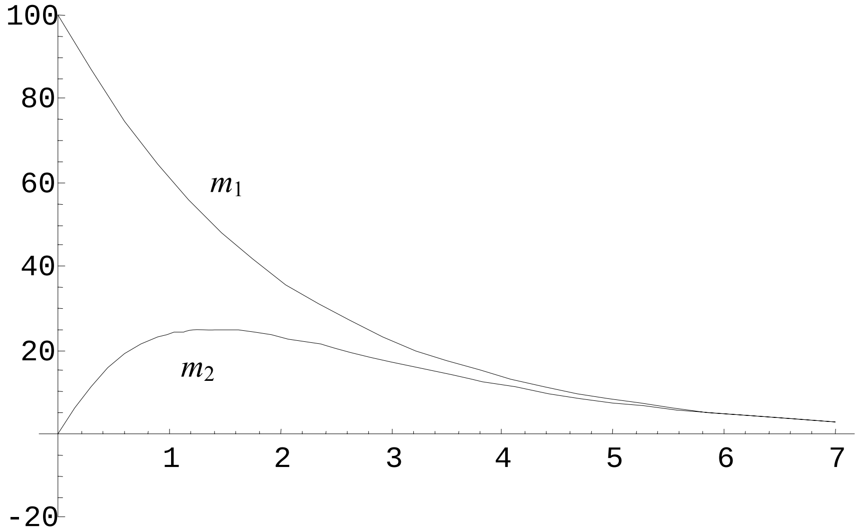
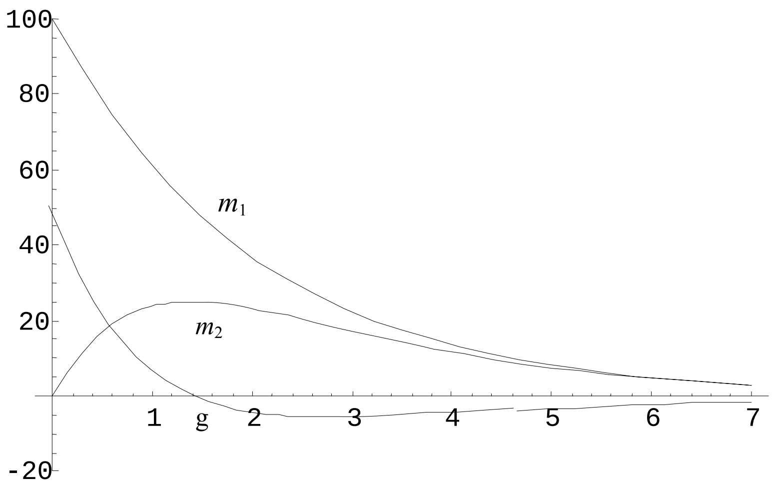
$$g(x) = -50e^{-0,5x} + 100e^{-x} \;;\; x \in \mathbb{R}^+$$

Bestimmen Sie die Null- und Extremstellen von g.
Beschreiben Sie das Verhalten von g für $x \to \infty$?
Zeichnen Sie auch den Graphen von g in Ihr Koordinatensystem ein.
Zeigen Sie, dass die Funktion m_2 eine Stammfunktion zur Funktion g ist.

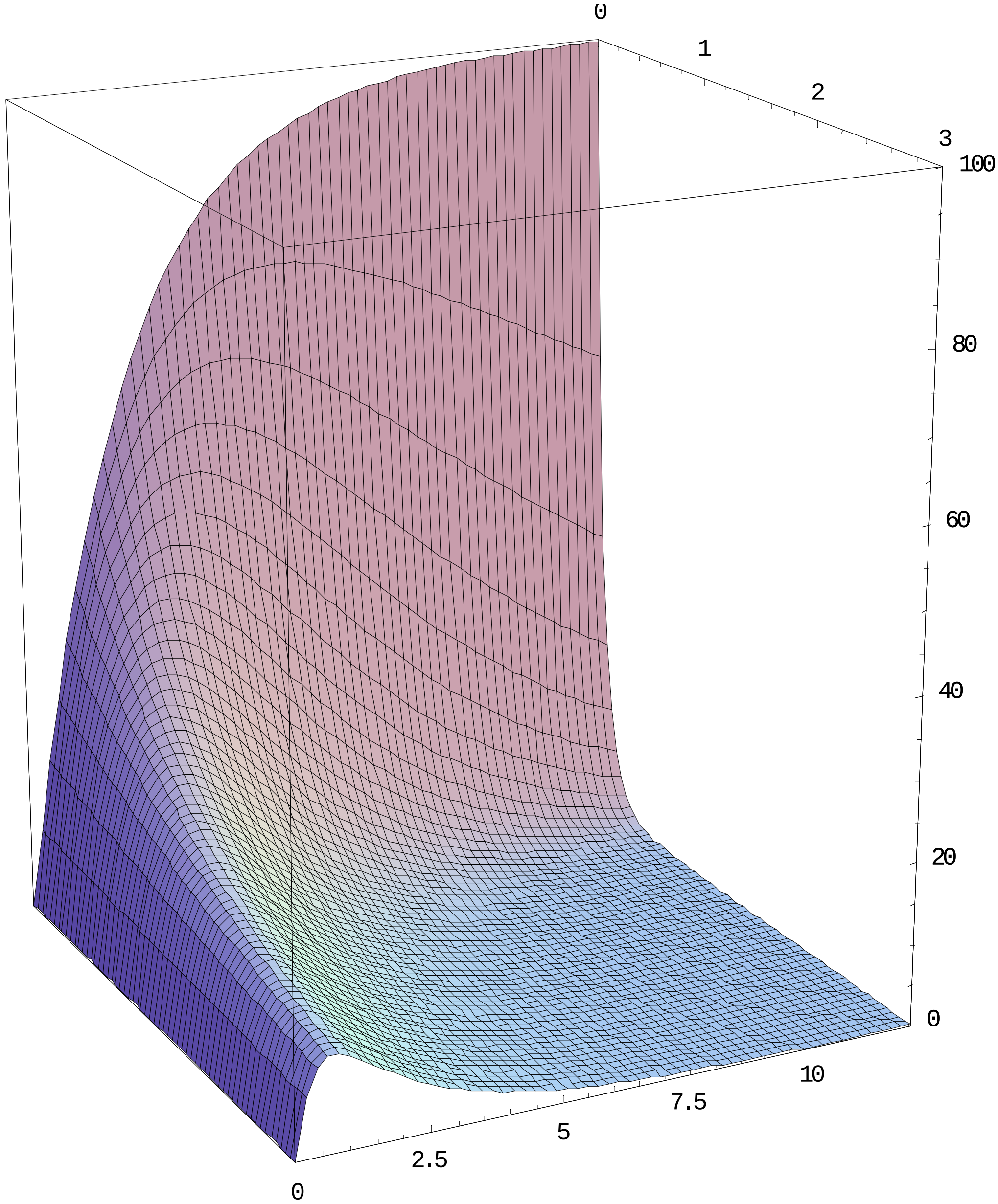
e) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von g, der x-Achse und der y-Achse begrenzt wird.
Interpretieren Sie die Bedeutung des Integrals $\int_0^t g(x)dx$.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Am Beginn, also bei $t = 0$, muss noch die gesamte Menge vorhanden gewesen sein, also 100 mg. Dies ergibt sich auch durch Einsetzen in die Gleichung für m_1. Zu lösen ist die Gleichung $0{,}5 = e^{-0{,}5\cdot t}$. Die Lösung ist $t = 2\cdot\ln(2) \approx 1{,}386$. Die Substanz S_1 hat also eine Halbwertszeit von etwa 1,386 Stunden. Vorhanden sind nach 6 Stunden $m_1(6)$ an Substanz, zerfallen demzufolge $100\text{ mg} - m_1(6) \approx 95{,}02\text{ mg}$.	5	10	
b)	Am Beginn, also bei $t = 0$, ist von der Ausgangssubstanz noch nichts zerfallen, also kann von Substanz S_2 noch nichts vorliegen. Einsetzen *von* $t = 0$ in die Funktionsgleichung von m_2 bestätigt diese Überlegung. S_2 entsteht aus der Ausgangssubstanz S_1, ihre Zuwachsrate ist also gleich der Abnahmerate von S_1. Diese ist anfangs am größten und wird immer kleiner; die Menge an „angesammeltem" S_2 wächst also ständig und geht gegen den Anfangswert von S_1. Andererseits ist S_2 ja nicht stabil und zerfällt ebenfalls exponentiell. Das bedeutet, dass die Abnahme – die Zerfallsrate – von S_2 proportional zum momentanen Wert ist. m_2 beginnt damit bei Null, steigt wegen der anfänglich hohen „Lieferungsrate" aus dem Zerfall von S_1 an und wird dann, da der eigene Zerfall irgendwann die „Nachlieferung" überholen wird, wieder abnehmen und letztlich gegen Null gehen. Zur <u>Berechnung</u> des Maximums ist es notwendig, die Nullstelle von m_2' zu bestimmen: Mit $m_2'(t) = -50\cdot e^{-0{,}5\cdot t} + 100\cdot e^{-t}$ ergibt sich $0 = -e^{-0{,}5t_E} + 2\cdot e^{-t_E} \Leftrightarrow t_E = \ln 4 \approx 1{,}386$. Hinreichende Argumente für die Extremaleigenschaft von t_E liefert z.B. die Beobachtung, dass t_E Durchgangsnullstelle von m_2' ist, oder die Tatsache, dass t_E die einzige Nullstelle von m_2' ist, zusammen mit dem oben angefügten Argument, dass m_2 ein Maximum haben muss. Einsetzen liefert $m_2(t_E) = 25$. Die maximale Menge der Substanz S_2 tritt also nach knapp 1,4 Stunden auf, und es sind 25 mg. *Hinweis* *Die Zerfallskonstante für den Zerfall von S_2 ist 1, die Halbwertszeit für den Stoff S_2 beträgt damit 0,69 Stunden.* *Es ist zwar interessant, nachzuvollziehen, wie sich m_2 aus m_1 unter diesen Bedingungen ergibt, aber im Rahmen einer Prüfungsaufgabe ist dies ganz unmöglich. Im Diagramm im Anhang ist die Funktion m_2.in Abhängigkeit des Zerfallsparameters wiedergegeben (Werte zwischen 0 und 3). Man sieht, dass für eine kleine Zerfallskonstante von S_2 (also eine große Halbwertszeit) die Menge an S_2 praktisch der Menge des zerfallenen S_1 folgt, bei einer kleinen Halbwertszeit von S_2 hingegen praktisch alles gelieferte S_2 sofort zerfällt und damit die Menge an S_2 der momentanen Lieferungsrate folgt.*	5	10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)		10	5	
d)	Bestimmung der Nullstellen von *g* durch Nullsetzen des Funktionsterms: $g(x)=0 \Leftrightarrow -50e^{-0,5x}+100e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{-0,5x}=2e^{-x}$ $\Leftrightarrow -0,5x=\ln(2)-x \Leftrightarrow x=\ln(4).$ Die einzige Nullstelle von *g* liegt bei $x=\ln(4)\approx 1,386$. Überprüfung auf mögliche Extremstellen durch Nullstellensuche bei der ersten Ableitung: $g'(x)=25e^{-0,5x}-100e^{-x}$, $g'(x_E)=0 \Leftrightarrow 25e^{-0,5x_E}-100e^{-x_E}=0 \Leftrightarrow 1=4e^{-0,5x_E} \Leftrightarrow x_E=\ln(16)$. Wiederum ergibt sich ein hinreichendes Argument für die Extremaleigenschaft von x_E daraus, dass x_E Durchgangsnullstelle von g' ist. *Hinweis: Natürlich kann auch mit der zweiten Ableitung argumentiert werden.* *g* hat also ein einziges Extremum (ein Maximum) mit den Koordinaten $(2,773 \mid -6,25)$. Für $x\to\infty$ geht der Term $e^{-0,5x}$ ebenso wie auch e^{-x} gegen Null und damit auch $g(x)\to 0$. Der Graph von *g* nähert sich also für zunehmende *x*-Werte der *x*-Achse. 			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	g ist die Ableitungsfunktion zu m_2. Betrachtet man z.B. die Graphen, so liegen der Hochpunkt des Graphen von m_2 und die Nullstelle von g bei dem gleichen x-Wert. Für $x \to \infty$ strebt $g(x)$ gegen Null. Ein anderer Weg führt über die Ableitung von m_2. $m_2' = g$.	10	10	5
e)	Der gesuchte Flächeninhalt A berechnet sich als Integral über g im Intervall von 0 bis ln(4): $A = \int_0^{\ln(4)} (-50e^{-0,5x} + 100e^{-x})dx = \left[100e^{-0,5x} - 100e^{-x}\right]_0^{\ln(4)} = 25$ und beträgt 25 Flächeneinheiten. Dieser Zahlenwert ist gleich dem Bestand an S_2 zum gleichen Zeitpunkt $t = \ln(4)$. Dies ist nicht zufällig: Da g ja die Ableitungsfunktion – die zeitliche Änderungsrate – von m_2 ist, muss $\int_0^t g(x)dx$ die vorhandene Menge an S_2 angeben.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	45	25


0
1
2
3
100
80
60
40
20
0
10
7.5
5
2.5
0