4.2 Leistungskurs

Aufgabe 1 Funktionenschar exponentieller Funktionen

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

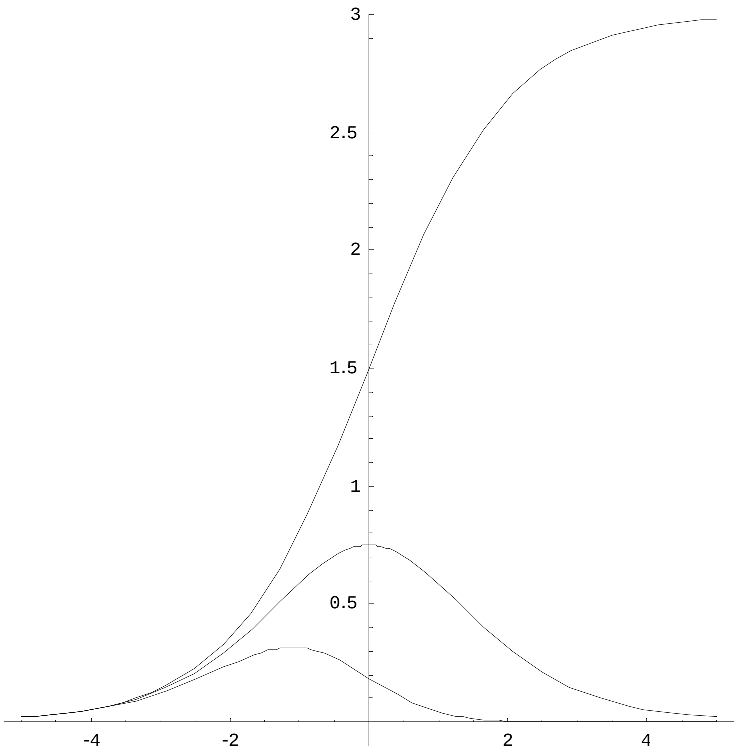
Gegeben ist die folgende Funktionenschar f_n mit:

$$f_n(x) = \frac{3 \cdot e^x}{(1 + e^x)^n} \;,\; n \in \{1;2;...\} \;,\; x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen für drei Funktionen dieser Schar. Bestimmen Sie die Zahlenwerte des Parameters n für die jeweilige Funktion.

Verwenden Sie dazu die Schnittpunkte der Graphen mit der y-Achse.

Beachten Sie:
n ist eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$.



b) Beschreiben Sie die Funktionen der Schar auf ihr Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

c) Weisen Sie nach, dass F_n mit

$$F_n(x) = \frac{3 \cdot (1 + e^x)^{1-n}}{1 - n}$$

für jedes $n \in \{2;3;...\}$ eine Stammfunktion der Funktion f_n ist.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f_2 und f_3 im gesamten Bereich $x < 0$.

HINWEIS: Keine zwei Funktionen der Schar haben einen gemeinsamen Punkt.

e) Zeigen Sie,

- dass f_2 symmetrisch zur y-Achse ist.
- dass der Graph von f_1 punktsymmetrisch zu seinem Schnittpunkt mit der y-Achse ist,

Begründen Sie, dass für $n \geq 3$ kein weiterer Graph symmetrisch zur y-Achse ist.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	<u>Berechnung der Nullwerte:</u> $n=1$: $f_1(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^1}=\frac{3}{2}=1{,}5$ $n=2$: $f_2(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=\frac{3}{4}=0{,}75$ $n=3$: $f_3(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^3}=\frac{3}{8}=0{,}375$ $n=4$: $f_4(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^4}=\frac{3}{16}=0{,}1875$ $n=5$: $f_5(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^5}=\frac{3}{32}=0{,}09375$ Dargestellt sind (von oben nach unten) die Graphen der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_4(x)$. oder: Der Grafik werden die Nullwerte der drei Graphen entnommen: 1,5 , 0,75 und (etwa) 0,2. Diese werden in die Funktionsgleichung eingesetzt: $f_n(0)=\frac{3}{(1+1)^n}=1{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n=2 \quad\Leftrightarrow\quad n=1$ $f_n(0)=\frac{3}{(1+1)^n}=0{,}75 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n=4 \quad\Leftrightarrow\quad n=2$ $f_n(0)=\frac{3}{(1+1)^n}\approx 0{,}2 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n\approx 15 \quad\Leftrightarrow\quad n\approx 4$ $f_3(0)=0{,}375$ und $f_5(0)\approx 0{,}09$, so dass die Ableseungenauigkeit hier keine Rolle spielen sollte.	15		
b)	<u>Fallunterscheidung:</u> $n=1$: $f_1(x)=\frac{3\cdot \mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$. Es gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=0$, da der Zähler gegen Null und der Nenner gegen 1 geht.			

	Lösungsskizze	I	II	III
	Es gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = 3$, da für große x der Summand 1 im Nenner zu vernachlässigen ist. $n > 1$: $f_n(x) = \dfrac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^n}$. Das Verhalten der Funktionen der Schar im Unendlichen kann man über das Wachstum von Zähler und Nenner untersuchen. Der Nenner lässt sich nach unten abschätzen durch $e^{n\cdot x}$, der ganze Bruch lässt sich dann nach oben abschätzen durch $\dfrac{3}{e^{(n-1)\cdot x}}$, so dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, da der Zähler gegen Null und der Nenner gegen 1 geht. Auch andere Argumentationen wie „der Zähler wächst mit e^x, während der Nenner mit $e^{x\cdot n}$ wächst“, sind zulässig.	10	10	5
c)	F_n ist eine Stammfunktion, wenn $F_n'(x) = f_n(x)$. F_n lässt sich schreiben als $F_n(x) = \dfrac{3\,(1+e^x)^{1-n}}{1-n}$, so dass für $F_n'(x)$ folgt: $F_n'(x) = \dfrac{3}{1-n}\cdot(1-n)\,e^x\cdot(1+e^x)^{-n}$ $= f_n(x).$	5	10	
d)	Da f_2 und f_3 keinen gemeinsamen Punkt haben und f_2 oberhalb von f_3 liegt (siehe Aufgabenteil a), ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt durch Integration der Differenz der Funktionsterme. $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 \big(f_2(x)-f_3(x)\big)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left[\dfrac{3\,(1+e^x)^{1-2}}{1-2} - \dfrac{3\,(1+e^x)^{1-3}}{1-3}\right]_a^0$ $= \lim\limits_{a\to-\infty}\left[\dfrac{3\,(1+e^0)^{-1}}{-1} - \dfrac{3\,(1+e^0)^{-2}}{-2} - \left(\dfrac{3\,(1+e^a)^{-1}}{-1} - \dfrac{3\,(1+e^a)^{-2}}{-2}\right)\right]$ $= \lim\limits_{a\to-\infty}\left[-1{,}5 + 0{,}375 + 3\,(1+e^a)^{-1} - 1{,}5\,(1+e^a)^{-2}\right]$ $= 0{,}375.$		20	
e)	• f_2 ist symmetrisch zur y-Achse, wenn $f_2(x) = f_2(-x)$. Dazu führt man folgende Äquivalenzumformungen durch: $f_2(x) = f_2(-x)$ $\Leftrightarrow \dfrac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{3\cdot e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ $\Leftrightarrow \dfrac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{(e^x)^2\cdot 3\cdot e^{-x}}{(e^x)^2\cdot(1+e^{-x})^2}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\Leftrightarrow \quad \dfrac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{3\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$ w.z.b.w. • f_1 ist symmetrisch zu (0 | 1,5), wenn $f_1(x)-1{,}5=-\left[f_1(-x)-1{,}5\right]$. Dazu führt man folgende Äquivalenzumformungen durch: $f_1(x)-1{,}5=-\left[f_1(-x)-1{,}5\right]$ $\Leftrightarrow \quad f_1(x)=-f_1(-x)+3$ $\Leftrightarrow \quad \dfrac{3\cdot e^x}{1+e^x}=\dfrac{-3\cdot e^{-x}}{1+e^{-x}}+3$ $\Leftrightarrow \quad \dfrac{3\cdot e^x}{1+e^x}=\dfrac{-3\cdot e^{-x}+3\cdot(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$ $\Leftrightarrow \quad \dfrac{3\cdot e^x}{1+e^x}=\dfrac{3}{1+e^{-x}}$ $\Leftrightarrow \quad \dfrac{3\cdot e^x}{1+e^x}=\dfrac{3\cdot e^x}{e^x+1}$ w.z.b.w. • f_n ist für $n \geq 3$ nicht symmetrisch zur y-Achse, da dann $f_n(x)=f_n(-x)$ gelten müsste, also $\dfrac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^n}=\dfrac{3\cdot e^{-x}}{(1+e^{-x})^n}$. Erweitert man die rechte Seite mit $\left(e^x\right)^n$, so ergibt sich $\dfrac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^n}=\dfrac{(e^x)^n\cdot 3\cdot e^{-x}}{(e^x+1)^n}$. Wegen der Nennergleichheit müssten die Zähler $3\cdot e^x$ und $3\cdot(e^x)^n\cdot(e^x)^{-1}=3\cdot(e^x)^{n-1}$ identisch sein. Dies ist nur für $n = 2$ erfüllt.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20