Aufgabe 14 Produktionsumstellung

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

Hinweis: Für die zu zeichnenden Funktionsgraphen kann es sinnvoll sein, eine Wertetabelle zu erstellen. Alle Funktionsgraphen sind in einem gemeinsamen Koordinatensystem darzustellen.

Für einen Betrieb soll eine Kostenfunktion ermittelt werden. Die zugehörigen Fixkosten belaufen sich auf 12 GE. Weiterhin ist bekannt, dass die Kosten für die Produktion von 2 ME 28 GE betragen. Bei einer Produktion von 3 ME betragen die Kosten 30 GE und der Graph der Funktion ändert dort seine Krümmungsrichtung.

a) Bestimmen Sie aus obigen Angaben eine Kostenfunktion K und zeichnen Sie ihren Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Interpretieren Sie die wirtschaftliche Bedeutung des Ordinatenschnittpunktes und des Wendepunktes.

c) Eine Marktanalyse hat ergeben, dass die Produkte unabhängig von der Absatzmenge zu einem Stückpreis von 10 GE an den Markt abgegeben werden können.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Preisabsatzfunktion p, der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G.
Ermitteln Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze. Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und den dazugehörigen maximalen Gewinn.
Zeichnen Sie die Graphen der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G.

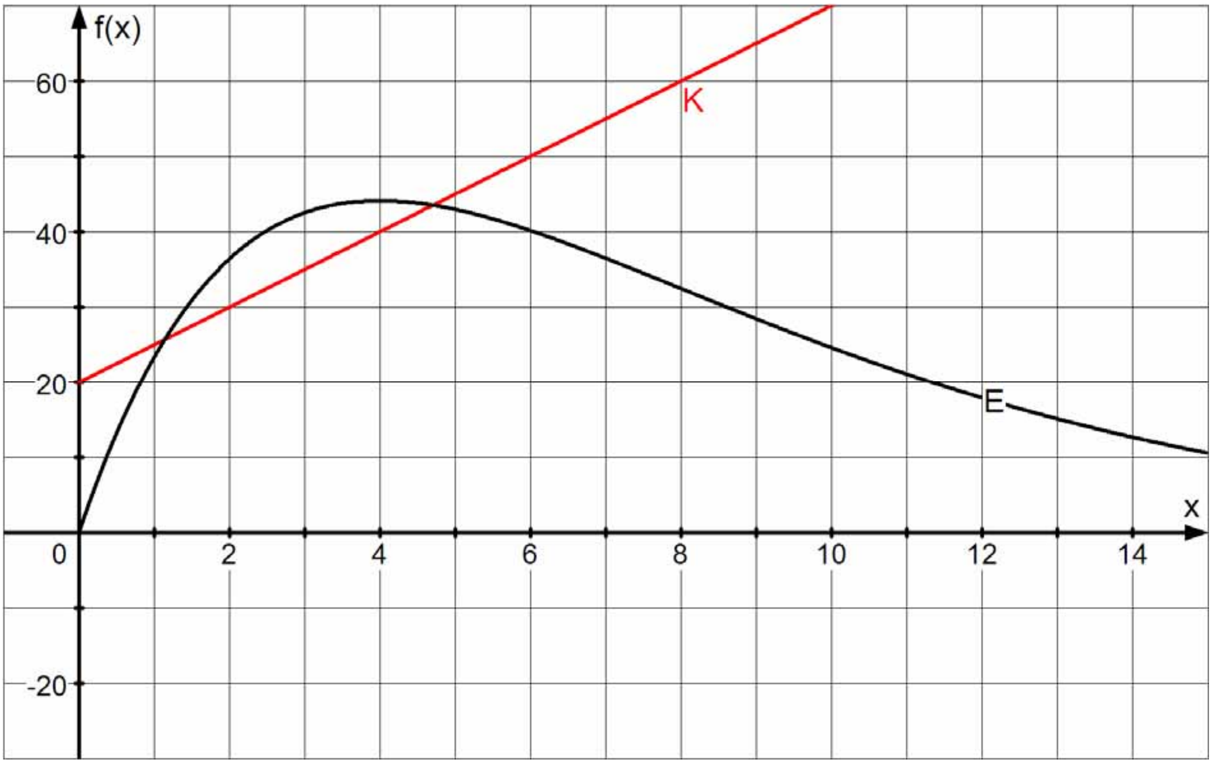
Die Betriebsleitung beabsichtigt, die Produktion zum Zwecke einer Gewinnmaximierung auf ein anderes Produkt umzustellen.
Für die Herstellung des neuen Produktes wird von einem linearen Kostenverlauf ausgegangen. Eine Marktanalyse hat weiterhin ergeben, dass der Preis, der für die Produkte zu erzielen ist, sich exponentiell zur Absatzmenge verhält. Die neue Kostenfunktion und die neue Preisabsatzfunktion lassen sich näherungsweise wie folgt beschreiben:

$$K_{neu}: \quad K(x) = 5x + 20 \qquad\qquad p_{neu}: \quad p(x) = 30 \cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

d) Bestimmen Sie die neue Erlösfunktion E_{neu} und untersuchen Sie, wie sich die Erlöse bei sehr hohen Absatzmengen verhalten.

Fortsetzung nächste Seite →

Gegeben seien im Folgenden die Graphen der neuen Kosten- und der neuen Erlösfunktion:



e) Stellen Sie im obigen Koordinatensystem die neue Gewinnfunktion G_{neu} als Differenz der gegebenen Graphen dar.

f) Ermitteln Sie für die neue Gewinnfunktion G_{neu} die gewinnmaximale Absatzmenge mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens auf eine Nachkommastelle gerundet.

Bestimmen Sie den dazugehörigen maximalen Gewinn und interpretieren Sie die Ergebnisse hinsichtlich der angestrebten Gewinnmaximierung.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	$K(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ $K'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$ $K''(x)=6a_3x+2a_2$ $K(0)=12 \Rightarrow a_0=12$ $K(2)=28 \Rightarrow 8a_3+4a_2+2a_1+a_0=28$ $K(3)=30 \Rightarrow 27a_3+9a_2+3a_1+a_0=30$ (a$_0$ einsetzen) $K''(3)=0 \Rightarrow 18a_3+2a_2=0$ $\left[\begin{array}{ccc\|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 27 & 9 & 3 & 18 \\ 18 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc\|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 30 & 6 & 0 & -12 \\ 18 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc\|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 48 & 8 & 0 & -12 \\ -24 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right]$ Durch Einsetzen ergibt sich: $a_3=0{,}5$; $a_2=-4{,}5$; $a_1=15$. Damit gilt: $K(x)=0{,}5x^3-4{,}5x^2+15x+12$ Funktionsgraph der Kostenfunktion K: siehe Aufgabenteil c).	5	15	
b)	Wirtschaftliche Bedeutung des Ordinatenschnittpunktes $(0\|12)$: Die fixen Kosten der Produktion betragen 12 GE. Das sind Kosten, die unabhängig von der Produktion entstehen und die man Fixkosten nennt. Wirtschaftliche Bedeutung des Wendepunktes von K: Im Wendepunkt der Kostenkurve sind die Grenzkosten am geringsten, d.h. die Zunahme der Kosten bei Ausweitung der Produktionsmenge ist am geringsten.		10	
c)	Preisabsatzfunktion p: $p(x)=10$ Erlösfunktion E: $E(x)=p(x)\cdot x=10x$ Gewinnfunktion G: $G(x)=E(x)-K(x)=-0{,}5x^3+4{,}5x^2-5x-12$ Gewinnschwelle und Gewinngrenze: Grafische Lösung siehe unten $-0{,}5x^3+4{,}5x^2-5x-12=0$ $x^3-9x^2+10x+24=0$ Horner-Schema: $x_1=3$. $\begin{array}{cccc} 1 & -9 & 10 & 24 \\ \hline 0 & 3 & -18 & -24 \\ 1 & -6 & -8 & 0 \end{array}$ $x^3-9x^2+10x+24=(x-3)\cdot\left(x^2-6x-8\right)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$$x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$x_2 = 3 + \sqrt{17} \approx 7{,}12$$

$$x_3 = 3 - \sqrt{17} \approx -1{,}12 \notin D$$

Gewinnschwelle: $x_1 = 3$

Gewinngrenze: $x_2 \approx 7{,}12$

<u>Gewinnmaximum:</u> $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$

$$G'(x) = -1{,}5x^2 + 9x - 5$$

$$G''(x) = -3x + 9$$

$$-1{,}5x^2 + 9x - 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + \frac{10}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{10}{3}}$$

$$x_1 \approx 5{,}38$$

$$x_2 \approx 0{,}62$$

$$G''(5{,}38) = -7{,}14 < 0$$

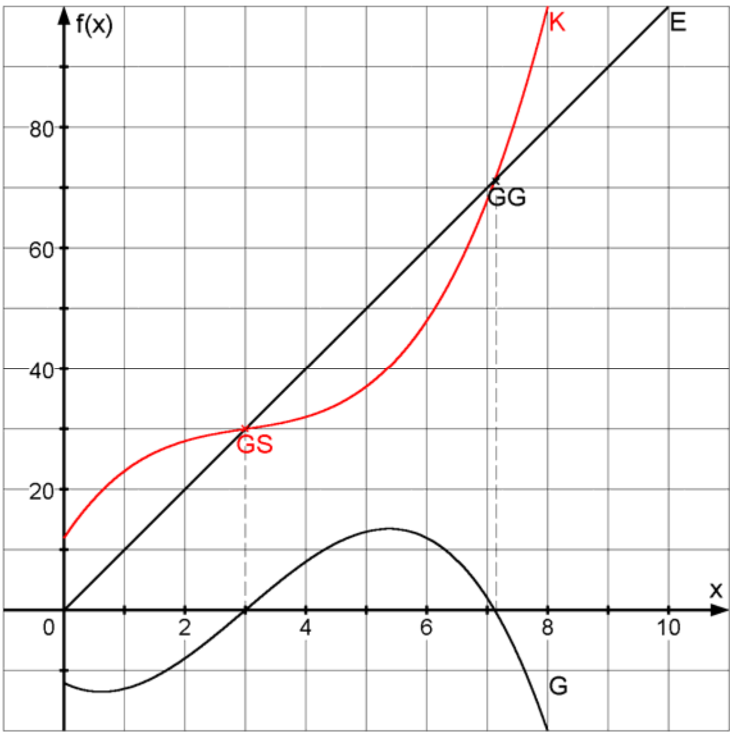
$$G''(0{,}63) = 7{,}14 > 0$$

$$G(5{,}38) = 13{,}49$$

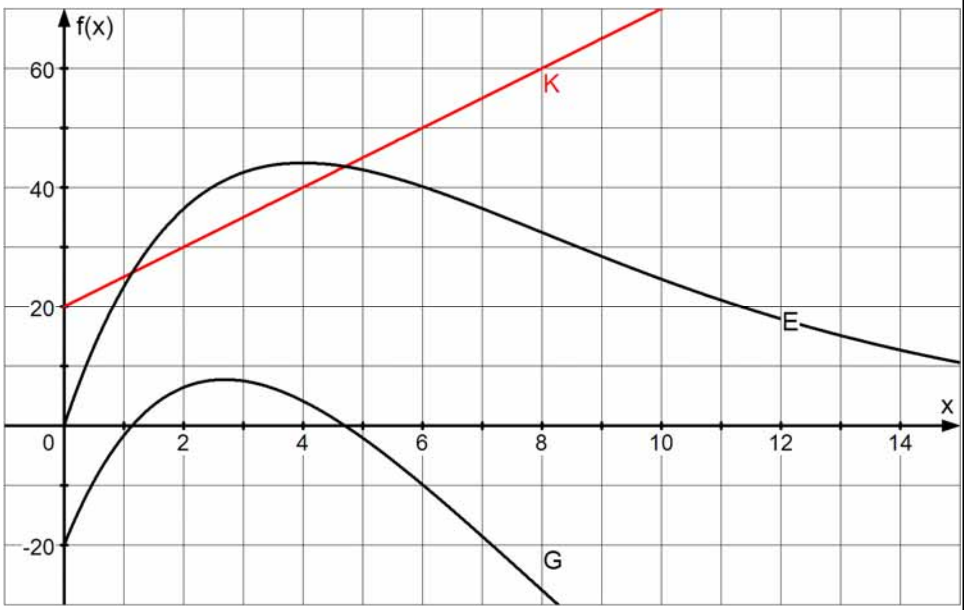
Die gewinnmaximale Menge beträgt 5,38 ME, das Gewinnmaximum 13,49 GE.

Grafische Lösung siehe unten.

<u>Grafische Darstellungen:</u>



		I	II	III
		10	25	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<u>Kostenfunktion K:</u> $K(x)=5x+20$ <u>Erlösfunktion E_{neu}:</u> $E_{neu}(x)=p(x)\cdot x=30x\cdot e^{-\frac{x}{4}}$ <u>Verhalten bei sehr hohen Ausbringungsmengen:</u> $\lim\limits_{x\to\infty}(30x\cdot e^{-\frac{x}{4}})=0$. Zähler- und Nennerterm gehen zwar beide mit wachsendem x gegen 0, der Nennerterm aber deutlich schneller, d.h. der Erlös geht bei hohen Ausbringungsmengen gegen 0. <u>oder:</u> Nachweis über L'Hospital $\lim\limits_{x\to\infty}(30x\cdot e^{-\frac{x}{4}})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30x}{e^{\frac{x}{4}}}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30}{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}}=0$ Der Erlös strebt gegen Null.	5		5
e)	Grafische Ermittlung der Gewinnfunktion:  		10	
f)	<u>Gewinnmaximum:</u> Bedingung: $G_{neu}'(x)=0 \;\wedge\; G_{neu}''(x)<0$ $G_{neu}(x)=30x\cdot e^{-\frac{x}{4}}-5x-20$ $G_{neu}'(x)=(30-7{,}5x)\cdot e^{-\frac{x}{4}}-5$ $G_{neu}''(x)=(\frac{15}{8}x-15)\cdot e^{-\frac{x}{4}}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Das Newtonsche Näherungsverfahren liefert: $x \approx 2,7$ $G''(2,7) = -5,06 < 0$,Max. $G(2,7) \approx 7,74$ Die gewinnmaximale Absatzmenge bei dem neuen Produkt liegt bei 2,7 ME und der maximale Gewinn beträgt 7,74 GE. Die Umstellung der Produktion ist unter dem Gesichtspunkt der Gewinnmaximierung nicht sinnvoll, da mit dem neuen Produkt nur ein geringerer maximaler Gewinn erzielt werden kann. Alternativ könnte bei diesem Aufgabenteil die gewinnmaximale Absatzmenge durch geschicktes Einsetzen in die neue Gewinnfunktion gefunden werden. Die graphische Lösung liefert dafür einen guten Näherungswert.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20