Aufgabe 7 Energiebedarf

Die Aufgabe entspricht inhaltlich der Abituraufgabe LK 2001/2 aus Baden-Württemberg.

Gegeben sind die Funktionen g und f durch

$$g(x) = \frac{2}{1+e^{1-x}} \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{2}{1+e^{x}}, \quad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}.$$

a) Weisen Sie nach, dass die Funktion g die Differentialgleichung

$$g'(x) = \tfrac{1}{2} g(x) \cdot [2 - g(x)] \quad \text{erfüllt.}$$

Beschreiben Sie die Form des Wachstums, das durch die Funktion g dargestellt wird?

Geben Sie dabei charakteristische Eigenschaften dieser Wachstumsform an.

b) Untersuchungen haben ergeben, dass die momentane Änderungsrate des Energiebedarfs (in 10^8 kWh/Jahr) eines Landes seit 1990 in guter Näherung durch $g(x)$ mit $x \geq 0$ (x: Zeit in Jahren ab Anfang 1990) beschrieben werden kann.

Zu welchem Zeitpunkt erreicht diese momentane Änderungsrate 98 % ihres Sättigungswertes?

In welchem Jahr verlangsamt sich erstmals die Zunahme der momentanen Änderungsrate des Energiebedarfs?

Berechnen Sie den gesamten Energiebedarf im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2000.

Nun werden Eigenschaften der Funktion *f* und ihre Beziehung zu g untersucht.

c) Ermitteln Sie die Asymptoten und den Wendepunkt des Graphen von f.

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten und geben sie den Wertebereich von f an.

Zeichnen Sie den Graphen von f samt Asymptoten.

d) Zeigen Sie, dass der Graph von g aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$ entsteht.

Fügen Sie eine Skizze des Graphen von g in Ihr Koordinatensystem aus Teilaufgabe c) ein.
Bestimmen Sie den Wertebereich und das Monotonieverhalten von g sowie den Wendepunkt des Graphen von g.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Einsetzen des Funktionsterms von g in die rechte Seite der Differentialgleichung und einfache Termumformungen ergeben:

$$\tfrac{1}{2}g(x)\cdot\left[2-g(x)\right]=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+e^{1-x}}\cdot\left(2-\frac{2}{1+e^{1-x}}\right)=\frac{1}{1+e^{1-x}}\cdot\frac{2+2e^{1-x}-2}{1+e^{1-x}}$$

$$=\frac{2e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}=g'(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$, also erfüllt g die Differentialgleichung.

Diese Differentialgleichung beschreibt ein logistisches Wachstum mit Sättigungsgrenze 2.
Logistisches Wachstum, das durch eine Funktion h beschrieben wird, erfüllt die Differentialgleichung $h'(x)=k\cdot h(x)\cdot(S-h(x))$. Bei zunehmendem Argument nähert sich *h(x)* der Sättigungsgrenze *S*, bleibt aber stets darunter.
Die momentane Änderungsrate von *h(x),* d .h. *h'(x),* nimmt zu, wenn $h(x)<\frac{1}{2}S$ ist und nimmt ab, wenn $h(x)>\frac{1}{2}S$ gilt. Ihr Maximum ist bei $h(x)=\frac{1}{2}S$.
Für kleine Argumente wird *h* näherungsweise durch ein exponentielles Wachstum beschrieben.

Für große Argumente wird *h* näherungsweise durch ein beschränktes Wachstum mit Sättigungsgrenze *S* beschrieben.
</td><td></td><td>22</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Der Sättigungswert von g ist 2. Zu berechnen ist das Argument x_1, für das der Funktionswert 1,96 beträgt.

$$1{,}96=\frac{2}{1+e^{1-x_1}}\Leftrightarrow 1{,}96+1{,}96e^{1-x_1}=2\Leftrightarrow e^{1-x_1}=\tfrac{1}{49}\Leftrightarrow 1-x_1=\ln(\tfrac{1}{49})$$

$$\Leftrightarrow x_1=1-\ln(\tfrac{1}{49})\Rightarrow x_1\approx 4{,}89$$

98% der Sättigungsgrenze wird also gegen Ende des Jahres 1994 erreicht.

Die Zunahme der momentanen Änderungsrate verlangsamt sich ab dem Zeitpunkt x_2, für den der Funktionswert gleich der Hälfte des Sättigungswertes ist.

$$g(x_2)=0{,}5\cdot 2\Leftrightarrow\frac{2}{1+e^{1-x_2}}=1\Leftrightarrow 1=e^{1-x_2}\Leftrightarrow 0=1-x_2\Leftrightarrow x_2=1$$

Ab dem Beginn des Jahres 1991 verlangsamt sich die momentane Änderungsrate des Energiebedarfs.

Der gesamte Energiebedarf E wird als Integral von g über den Zeitraum von 0 bis 11 Jahren berechnet.

$$E=\int_0^{11}g(x)dx=\int_0^{11}\frac{2}{1+e^{1-x}}dx=2\cdot\int_0^{11}\frac{e^x}{e^x+e}dx=2\cdot\left[\ln(e^x+e)\right]_0^{11}$$

$$=2\cdot(\ln(e^{11}+e)-\ln(e^0+e))\approx 19{,}37$$

Der gesamte Energiebedarf zwischen Anfang 1990 und Ende 2000 beträgt ca. 19,4 10^8 kWh.
</td><td></td><td>10</td><td>16</td></tr>
</table>

Lösungsskizze

c) Da f in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, kann der Graph von f keine senkrechten Asymptoten besitzen.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0$, da die Exponentialfunktion für $x \to \infty$ auch gegen ∞ geht.
Die x-Achse ist also waagerechte Asymptote für $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{1+e^x} = 2$, da die Exponentialfunktion für $x \to -\infty$ gegen 0 geht.
Die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ ist also waagerechte Asymptote für $x \to -\infty$.

Die Ableitungen der Funktion f erhält man mit der Quotienten- und der Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}\ ,\ f''(x) = \frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}\ ,\ f'''(x) = \frac{-2e^{3x}+8e^{2x}-2e^x}{(1+e^x)^4}.$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz einer Wendestelle ist $f''(x) = 0$.

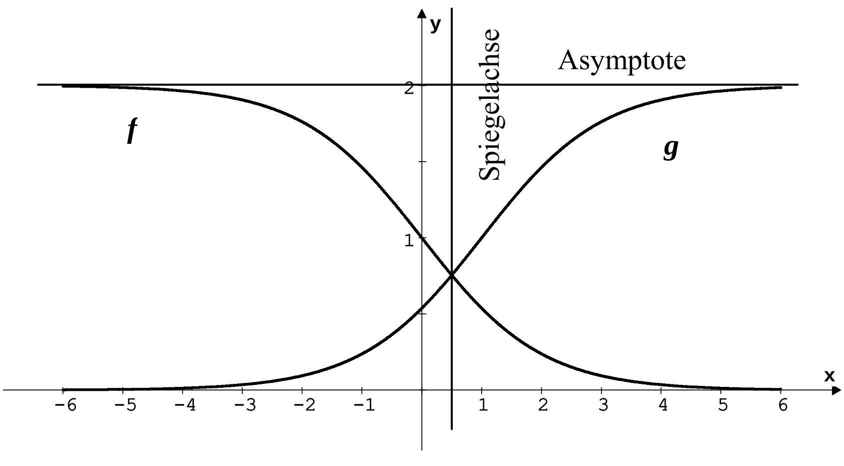
$\frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} = 0 \Leftrightarrow 2e^x(e^x-1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \oplus$ gilt.

Da $f'''(0) = \frac{1}{4} \neq 0$ und $f(0) = 1$ gilt, besitzt der Graph von f den Wendepunkt $(0 \mid 1)$.

(Alternativ kann auf die Berechnung von $f'''(x)$ verzichtet werden, wenn der Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ an der Stelle 0 gezeigt wird.)

Da die erste Ableitung von f für alle $x \in \mathbb{R}$ negativ ist, ist die Funktion f streng monoton fallend.

Der Wertebereich von f ist $]0; 2[$, da die waagerechten Asymptoten den Gleichungen $y = 2$ und $y = 0$ genügen und die Funktion f streng monoton fallend ist.



Zuordnung, Bewertung		
I	II	III
16	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Um die Achsensymmetrie zur Geraden $x = \frac{1}{2}$ nachzuweisen, zeigt man, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(\frac{1}{2} - x) = g(\frac{1}{2} + x)$ erfüllt ist. $f(\frac{1}{2} - x) = \frac{2}{1 + e^{\frac{1}{2} - x}} = \frac{2}{1 + e^{1 - (\frac{1}{2} + x)}} = g(\frac{1}{2} + x)$. Skizze siehe Lösung Teil c) Der Wertebereich von g entspricht dem von f, da der Graph von g durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$ aus dem Graphen von f entsteht. Die Funktion g ist streng monoton steigend, da f streng monoton fallend ist. Der Wendepunkt (0 | 1) des Graphen von f wird durch die beschriebene Achsenspiegelung auf den Wendepunkt (1 | 1) des Graphen von g abgebildet.		16	
	Insgesamt 100 BWE	16	68	16