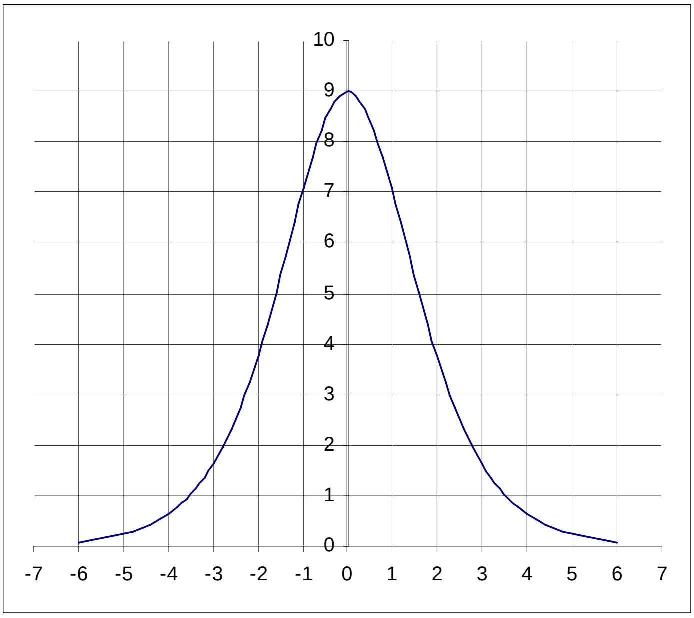
Aufgabe 8 Schimmelpilz

Dieser Aufgabe liegt die Leistungskurs-Aufgabe 2002/2 aus dem Zentralabitur Baden-Württemberg zu Grunde.

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f_a.



a) Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a.

b) Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^x, \; x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der Graphen von f_{36} und g.

Für welche Werte von a hat der Graph von f_a mit dem Graphen der Funktion g einen Punkt gemeinsam? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie diesen Punkt an.

c) Zeigen Sie: Für jedes $a \neq 0$ gilt: $f_a(x) = f_a(-x), \; x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f_a und die x-Achse begrenzen eine beidseitig ins Unendliche reichende Fläche. Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt hat.

d) Durch $F(t) = \dfrac{36e^t}{1+e^t}$ wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt. Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $F(t)$ in cm^2 gemessen.

Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an welchem sich der Schimmelpilz am schnellsten ausbreitet.

Bestimmen Sie die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Weisen Sie nach, dass F eine Differentialgleichung der Form

$$F'(t) = k \cdot F(t) \cdot \left[G - F(t)\right]$$

erfüllt.

Skizzieren Sie den Graphen von F für $-5 \le t \le 5$.
Beschreiben Sie die Form des Wachstums, das durch die Funktion F dargestellt wird.

Geben Sie dabei charakteristische Eigenschaften dieser Wachstumsform an.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Bestimmung des Parameters a: Der in der Aufgabe dargestellte Graph der Funktion f_a verläuft durch den Punkt (0 | 9). Damit gilt: $f_a(0)=9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=9$ $\Leftrightarrow \quad \frac{a}{4}=9$ $\Leftrightarrow \quad a=36.$	5		
b)	Bestimmung des gemeinsamen Punktes der Graphen von g und f_{36}: Die Schnittstellen der Graphen von g und f_{36} sind die Lösungen der Gleichung $f_{36}(x_s)=g(x_s)$. Dieser Ansatz ergibt: $\frac{36e^{x_s}}{\left(1+e^{x_s}\right)^2}=e^{x_s} \quad \Leftrightarrow \quad 36=\left(1+e^{x_s}\right)^2, \quad da \quad e^{x_s}>0$ $\Leftrightarrow \quad 1+e^{x_s}=6, \qquad da \quad 1+e^{x_s}>1$ $\Leftrightarrow \quad e^{x_s}=5$ $\Leftrightarrow \quad x_s=\ln(5).$ Wegen $g(\ln(5)) = 5$ haben f_{36} und g den Punkt (ln(5) | 5) gemeinsam. Bedingung für gemeinsame Punkte: Eine beliebige Schnittstelle x_T der Graphen von g und f_a ist eine Lösung der Gleichung $f_a(x_T)=g(x_T)$. Dies liefert: $\frac{ae^{x_T}}{\left(1+e^{x_T}\right)^2}=e^{x_T} \quad \Leftrightarrow \quad a=\left(1+e^{x_T}\right)^2$. Aus $e^{x_T}>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ folgt $\left(1+e^{x_T}\right)^2>1$. Daher ist die Gleichung $a=\left(1+e^{x_T}\right)^2$ nur lösbar für $a > 1$. Es gilt dann $1+e^{x_T}=\sqrt{a}$ und man erhält schließlich $x_T=\ln\left(\sqrt{a}-1\right)$. Nur im Fall $a > 1$ besitzen die Graphen von f_a und g einen gemeinsamen Punkt und dies ist dann der Punkt $\left(\ln\left(\sqrt{a}-1\right) \mid \sqrt{a}-1\right)$.	5	30	
c)	<u>Untersuchung der Symmetrie:</u> Für jedes $a\neq 0$ und für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt: $f_a(-x)=\frac{ae^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{ae^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\cdot\frac{e^{2x}}{e^{2x}}=\frac{ae^x}{\left(\left(1+e^{-x}\right)e^x\right)^2}=\frac{ae^x}{\left(e^x+1\right)^2}=f_a(x).$ Der Graph von f_a ist somit für jedes $a\neq 0$ symmetrisch zur y-Achse. <u>Flächeninhaltsberechnung:</u> Der gesuchte Flächeninhalt der beidseitig bis ins Unendliche reichenden Fläche zwischen dem Graphen von f_a und der x-Achse sei A. Aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse gilt:			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$A = \left|2 \cdot \int_0^\infty f_a(x)\,dx\right| = 2 \cdot \left|\lim_{z\to\infty}\int_0^z f_a(x)\,dx\right| = 2|a| \cdot \lim_{z\to\infty}\int_0^z \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx\,.$$

Somit wird zunächst eine Stammfunktion für $\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ ermittelt. Hierzu wird die Substitutionsregel mit der Substitution $t = 1 + e^x$ verwendet. Wenige leichte Umformungsschritte ergeben:

$$\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} = \frac{-1}{1+e^x}\,.$$

Damit ergibt die Flächenberechnung:

$$A = 2|a| \lim_{z\to\infty}\int_0^z \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx = 2|a| \lim_{z\to\infty}\left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^z = 2|a| \lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^z}\right) = 2|a| \cdot \frac{1}{2} = |a|.$$

</td><td></td><td>10</td><td>20</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Die Funktion F mit $F(t) = \frac{36e^t}{1+e^t}$ gibt die zum Zeitpunkt t bedeckte Fläche an.
Dann ist $F'(t)$ die momentane Ausbreitungsgeschwindigkeit (oder Änderungsrate). Da die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schimmelpilzes ermittelt werden soll, muss F' auf lokale Extremstellen untersucht werden. Es gilt:

$$F'(t) = 36\,\frac{e^t\left(1+e^t\right) - e^t e^t}{\left(1+e^t\right)^2} = 36\,\frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^2} = f_{36}(t).$$

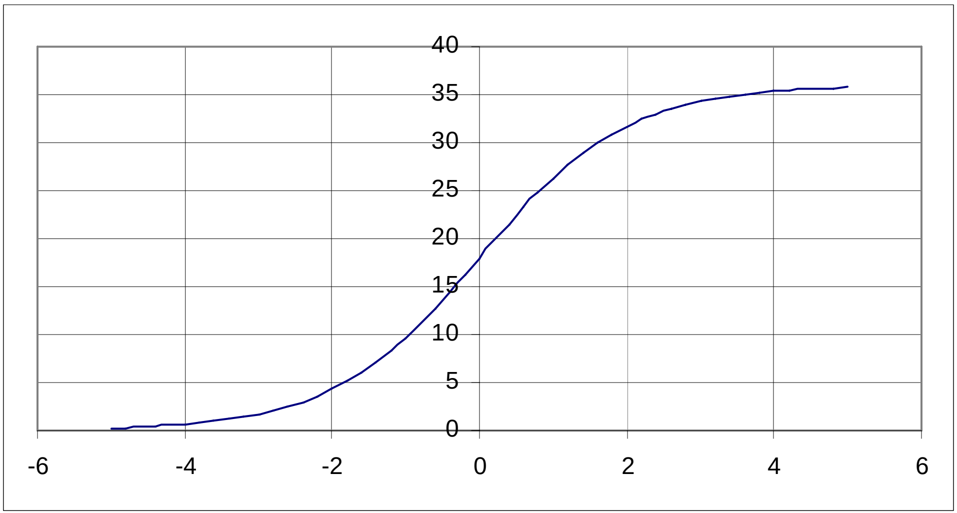
Zu dieser Funktion gehört der in der Aufgabenstellung angegebene Graph. Damit besitzt F' offensichtlich ein lokales Maximum an der Stelle $t = 0$. Ferner gilt: $F'(0) = 9$. Damit hat der Schimmelpilz zum Zeitpunkt $t = 0$ die größte Ausbreitungsgeschwindigkeit von $9\,\frac{\text{cm}^2}{\text{Tag}}$.
Der Nachweis der Differentialgleichung erfolgt durch Einsetzen. Man erhält:

$$\begin{aligned} k \cdot F(t) \cdot \left[G - F(t)\right] &= k \cdot \frac{36e^t}{1+e^t} \cdot \left[G - \frac{36e^t}{1+e^t}\right] \\ &= 36k \cdot \frac{e^t}{1+e^t} \cdot \left[\frac{G\left(1+e^t\right) - 36e^t}{1+e^t}\right] \\ &= 36k \cdot \frac{e^t}{1+e^t} \cdot \left[\frac{G + \left(G-36\right)e^t}{1+e^t}\right] \end{aligned}$$

Wählt man nun $G = 36$ und $k = \frac{1}{36}$, erhält man $k\ F(t)\left[G - F(t)\right] = F'(t)$.

Offenbar handelt es sich um logistisches Wachstum. Zu Beginn des Beobachtungszeitraumes ($t = 0$) hat sich der Schimmelpilz bereits so weit ausgedehnt, dass 50 % der Brotscheibenfläche vom Schimmel befallenen ist. Allerdings verlangsamt sich dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schimmels. Nach ca. 5 Tagen nach Beobachtungsbeginn ist praktisch die gesamte Brotfläche mit

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Schimmel befallen. Der Beginn der Schimmelbildung lässt sich etwa auf den 5. Tag vor Beobachtungsbeginn festlegen. Das Modell kann den exakten Beginn und das exakte Ende der Schimmelausbreitung nicht wiedergeben, da sich die Funktion F asymptotisch an den Rändern der mathematischen (maximalen) Definitionsmenge verhält.
</td><td></td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>10</td><td>70</td><td>20</td></tr>
</table>