Kurvendiskussion mit Exponentialfunktionenscharen II - Aufgabe 303A - Lösung

Definieren des Funktionsterms

$f(x) := x \cdot e^{\left(-k \cdot x^2\right)}$ "Done"

Bestimmen der Ableitungen

$\frac{d}{dx}(f(x))$ $\left(1 - 2 \cdot k \cdot x^2\right) \cdot e^{\left(-k \cdot x^2\right)}$

$fs(x) := \left(1 - 2 \cdot k \cdot x^2\right) \cdot e^{\left(-k \cdot x^2\right)}$ "Done"

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ $2 \cdot k \cdot x \cdot \left(2 \cdot k \cdot x^2 - 3\right) \cdot e^{\left(-k \cdot x^2\right)}$

$fss(x) := 2 \cdot k \cdot x \cdot \left(2 \cdot k \cdot x^2 - 3\right) \cdot e^{\left(-k \cdot x^2\right)}$ "Done"

$\frac{d^3}{dx^3}(f(x))$ $-2 \cdot k \cdot \left(4 \cdot k^2 \cdot x^4 - 12 \cdot k \cdot x^2 + 3\right) \cdot e^{\left(-k \cdot x^2\right)}$

$fsss(x) := -2 \cdot k \cdot \left(4 \cdot k^2 \cdot x^4 - 12 \cdot k \cdot x^2 + 3\right) \cdot e^{\left(-k \cdot x^2\right)}$ "Done"

a$_1$) Bestimmen des Schnittpunktes mit der y-Achse

$f(0)$ 0

a$_2$) Bestimmen der Schnittpunkt(e) mit der x-Achse

$\text{solve}(f(x) = 0, x)$ $x = 0$

$xn1 := 0$ 0 $yn1 := f(xn1)$ 0

a$_3$) Bestimmen der Extrempunkte

$\text{solve}(fs(x) = 0, x)$ $x = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{k}} \text{ and } \frac{1}{k} \geq 0 \text{ or } x = \frac{-\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{k}} \text{ and } \frac{1}{k} \geq 0$

$xe1 := \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{k}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{k}}$ $fss(xe1)$ $-2 \sqrt{2 \cdot k} \cdot e^{-1/2}$ $ye1 := f(xe1)$ $\frac{e^{-1/2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{k}}$

$xe2 := \frac{-\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{k}}$ $\frac{-\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{k}}$ $fss(xe2)$ $2 \sqrt{2 \cdot k} \cdot e^{-1/2}$ $ye2 := f(xe2)$ $\frac{-\left(e^{-1/2}\right) \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{k}}$

a$_4$) Bestimmen der Wendepunkte

$\text{solve}(fss(x) = 0, x)$ $x = \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{k}} \text{ and } \frac{1}{k} \geq 0 \text{ or } x = \frac{-\sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{k}} \text{ and } \frac{1}{k} \geq 0 \text{ or } x = 0 \text{ or } k = 0$

$xw1 := \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{k}}$ $\frac{\sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{k}}$ $fsss(xw1)$ $12 \cdot k \cdot e^{-3/2}$ $yw1 := f(xw1)$ $\frac{e^{-3/2} \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{k}}$

$xw2 := \frac{-\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{k}}$ $\frac{-\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{k}}$ $\text{fsss}(xw2)$ $12\cdot k\cdot e^{-3/2}$ $yw2 := f(xw2)$ $\frac{-\left(e^{-3/2}\right)\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{k}}$

$xw3 := 0$ 0 $\text{fsss}(xw3)$ $-6\cdot k$ $yw3 := f(xw3)$ 0

b) Berechnen eines Punktes / Nachweis eines festen Punktes

$f(0)$ 0

c) Bestimmen des Parameters zu einem vorgegebenen Punkt

$\text{solve}(f(1) = 3, k)$ $k = -\ln(3)$

d) Berechnen einer Steigung / Nachweis einer festen Steigung

$\text{fs}(0)$ 1

e) Bestimmen des Parameters zu einer vorgegebenen Steigung

$\text{solve}(\text{fs}(-1) = 0, k)$ $k = \frac{1}{2}$

f) Bestimmen des Terms einer Tangente

$xt1 := xw1$ $\frac{\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{k}}$ $yt1 := f(xt1)$ $\frac{e^{-3/2}\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{k}}$

$m1 := \text{fs}(xt1)$ $-2\cdot e^{-3/2}$ $\text{solve}(yt1 = m1\cdot xt1 + n1, n1)$ $n1 = \frac{3\cdot e^{-3/2}\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{k}}$

$xt2 := xw2$ $\frac{-\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{k}}$ $yt2 := f(xt2)$ $\frac{-\left(e^{-3/2}\right)\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{k}}$

$m2 := \text{fs}(xt2)$ $-2\cdot e^{-3/2}$ $\text{solve}(yt2 = m2\cdot xt2 + n2, n2)$ $n2 = \frac{-3\cdot e^{-3/2}\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{k}}$

$xt3 := xw3$ 0 $yt3 := f(xt3)$ 0

$m3 := \text{fs}(xt3)$ 1 $\text{solve}(yt3 = m3\cdot xt3 + n3, n3)$ $n3 = 0$

g) Bestimmen des Parameters k für maximalen/minimalen Extrempunkt
h) Bestimmen des Parameters k für maximalen/minimalen Wendepunkt

i) Bestimmen der Kurve der Extrempunkte

$\text{solve}(x = xe1, k) \qquad k = \frac{1}{2\cdot x^2} \text{ and } \frac{1}{x} \geq 0 \quad y = ye1 \mid k = \frac{1}{2\cdot x^2} \qquad y = e^{-1/2}\cdot|x|$

$\text{solve}(x = xe2, k) \qquad k = \frac{1}{2\cdot x^2} \text{ and } \frac{1}{x} \leq 0 \quad y = ye2 \mid k = \frac{1}{2\cdot x^2} \qquad y = -(e^{-1/2})\cdot|x|$

j) Bestimmen der Kurve der Wendepunkte

$\text{solve}(x = xw1, k) \qquad k = \frac{3}{2\cdot x^2} \text{ and } \frac{1}{x} \geq 0 \quad y = yw1 \mid k = \frac{3}{2\cdot x^2} \qquad y = e^{-3/2}\cdot|x|$

$\text{solve}(x = xw2, k) \qquad k = \frac{3}{2\cdot x^2} \text{ and } \frac{1}{x} \leq 0 \quad y = yw2 \mid k = \frac{3}{2\cdot x^2} \qquad y = -(e^{-3/2})\cdot|x|$

k) Besonderes

Bestimmen einer Stammfunktion

$\int (f(x))\, dx \qquad \frac{-\left(e^{\left(-k\cdot x^2\right)}\right)}{2\cdot k}$

l) Berechnen eines Flächeninhalts

$\int_0^t (f(x))\, dx \qquad \frac{1}{2\cdot k} - \frac{e^{\left(-k\cdot t^2\right)}}{2\cdot k}$

Wenn $k > 0$ ist, strebt der Term für $t \cdot\!\!\rightarrow \cdot\infty$ gegen $\frac{1}{2\cdot k}$; für $k \leq 0$ dagegen ist der Grenzwert nicht definiert.

m) Bestimmen des Parameters zu einem vorgegebenen Flächeninhalt

n) Bestimmen des Parameters für extremalen Flächeninhalt