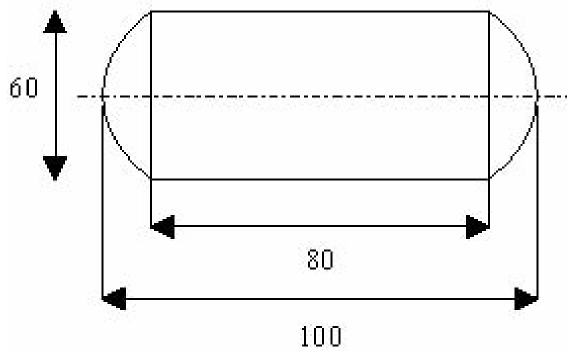
Aufgabe 10: Wassertank

Modellierungsaufgabe mit Volumenberechnung mittels Integration. Beispielaufgabe aus EPA Mathematik, 2002.

In dieser Aufgabe soll zunächst das Volumen eines Wassertanks näherungsweise bestimmt werden. und dann die Füllhöhenfunktion skizziert werden.

a) Gegeben ist ein liegender Wassertank, der aus einem Zylinder mit zwei kuppelförmigen Aufsätzen besteht. Die Abmessungen sind der nebenstehenden Skizze des Querschnitts des Wassertanks zu entnehmen. Die Maße sind in Zentimetern angegeben. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu, stellt aber charakteristische Eigenschaften (z.B. Knicke) ausreichend gut dar.

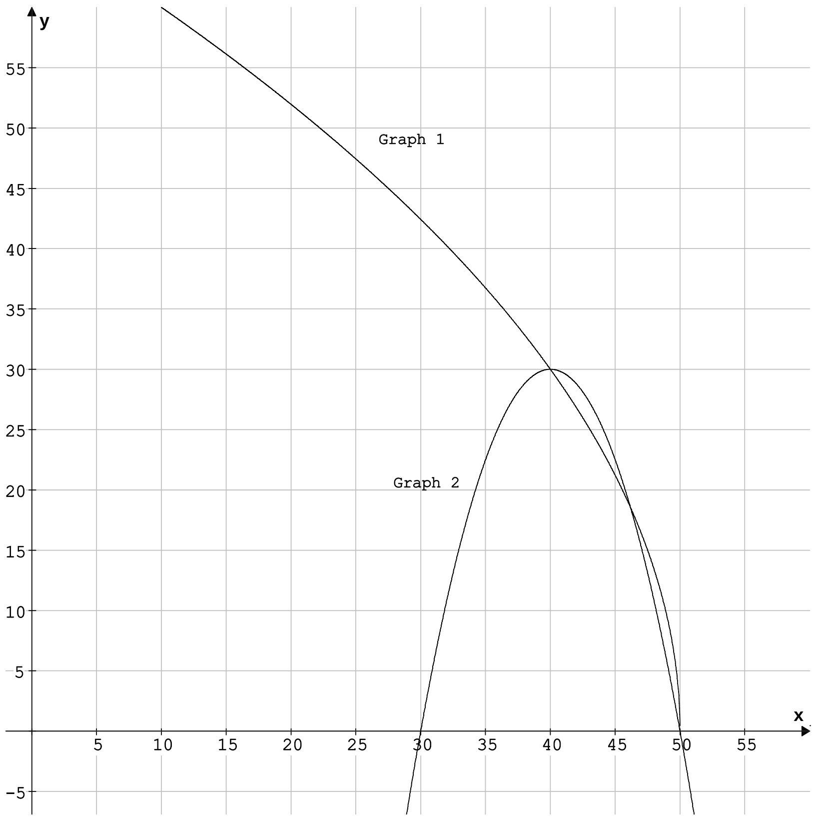


Schätzen Sie mit einfachen geometrischen Mitteln ab, dass weniger als 300 Liter in den Tank passen.

b) Es sollen nun die kuppelförmigen Aufsätze mathematisch beschrieben werden. Betrachten Sie dazu die Funktionen f und g mit

$$f(x) = -0{,}3 \cdot (x-40)^2 + 30 \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{4500 - 90x}\ .$$

Die Graphen der beiden Funktionen sind der nachfolgenden Skizze zu entnehmen. Begründen Sie, welcher Graph zu f bzw. g gehört.



Welche Drehkörper entstehen, wenn man den Ausschnitt der Graphen jeweils im Intervall [40;50] um die x-Achse rotieren lässt?
Beschreiben Sie, dass man mit beiden Funktionen jeweils die kuppelförmigen Aufsätze des Wassertanks näherungsweise beschreiben kann. Beurteilen Sie die Qualität der Näherung.

c) Das Volumen eines Körpers, der durch Rotation des Graphen einer Funktion k im Intervall $[a; b]$ um die x-Achse entsteht, kann durch die Formel

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(k(x)\right)^2 dx$$

berechnet werden.

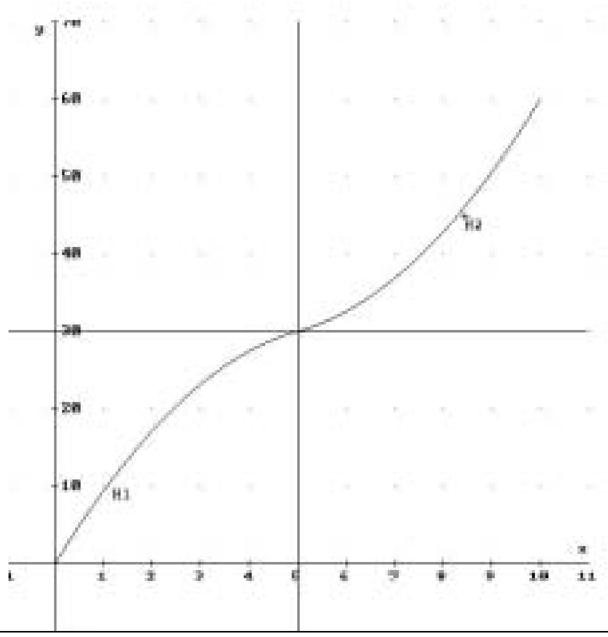
Bestimmen Sie das Volumen einer Tankkuppel mit Hilfe von $g(x)$.

Berechnen Sie nun mit dieser Näherung das Volumen des gesamten Wassertanks.

d) Der Wassertank wird bei konstanter Zuflussrate mit Wasser gefüllt.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen für die Funktion H, die die Höhe der Wasseroberfläche im Tank über dem Boden zum Zeitpunkt t angibt, wenn der Tank wie in der Skizze auf der Seite liegt.
Skizzieren Sie grob den Verlauf des Graphen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	I	II	III
a)	Legt man einen Zylinder mit einem Grundflächenradius von 30 cm und einer Höhe von 100 cm um den gesamten Tank, so erhält man eine Obergrenze für das Tankvolumen. $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 900 \cdot 100 \approx 282\,743{,}338...$ 282 743 cm^3 sind knapp 283 Liter (da 1000 cm^3 = 1 l). Also gilt $V_{\text{Tank}} < 300$ Liter.	5	5	
b)	Die Funktion f ist quadratisch und ihr Funktionsterm in Scheitelpunktsform gegeben, ihr Graph muss eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $\left(40 \mid 30\right)$ sein. Dieses trifft für den Graphen 2 zu. Der Graph 1 gehört zu der Wurzelfunktion g. Rotieren diese Graphenabschnitte um die x-Achse, so erhält man für beide Funktionen eine Kuppel. Bei der Funktion f weist die Kuppel eine Spitze auf, bei der Funktion g ist sie rund. Legt man ein Koordinatensystem mittig in den Wassertank, so beschreiben beide Funktionen im Intervall [40; 50] den Abschluss des rechten oberen Tankviertels, denn: $g(40) = f(40) = 30$ und $g(50) = f(50) = 0$ $g(50) = f(50) = 0$. Der Graph der Funktion g schließt an der Stelle $x = 40$ mit einem Knick an den Tankkörper an, so wie in der Skizze angedeutet. Spiegelt man den Graphen von g an der x-Achse, so ergibt sich kein Knick für $y = 0$, da die Wurzelfunktion dort eine senkrechte Tangente besitzt, was ebenfalls der Skizze entspricht. Der Graph der Funktion f schließt an der Stelle $x = 40$ ohne Knick an den Tankkörper an, da dort der Scheitelpunkt der Parabel liegt, die Tangente also waagerecht ist. Allerdings weist der Graph von f bei $y = 0$ bei der Spiegelung an der x-Achse einen Knick auf, da die Steigungen endlich, aber entgegengesetzt im Vorzeichen sind. Die Funktion g gibt die in der Skizze erkennbaren charakteristischen Eigenschaften wieder und stellt damit, da Genaueres über die Tankform nicht bekannt ist, die bessere Näherung da.	15	20	10
c)	Um das Volumen einer Tankkuppel zu erhalten, setzen wir die Funktion 9 für k in die angegebene Formel ein und integrieren über das Intervall [40; 50]. $V_{\text{Kuppel}} = \pi \cdot \int_{40}^{50} (4500 - 90x)\,dx = \pi \cdot \left[4500x - 45x^2\right]_{40}^{50} = 14\,137$. Das Kuppelvolumen beträgt also ca. 14,14 Liter. Um das Volumen des gesamten Wassertanks zu berechnen, benötigen wir zwei Mal das Kuppelvolumen sowie das Volumen des Mittelzylinders mit der Höhe 80 cm.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 30^2 \cdot 80 \approx 226\,195$, d.h. der Mittelzylinder hat ein Volumen von ca. 226,2 Liter. Damit ergibt sich das Gesamtvolumen zu: $V \approx 254{,}5$ l.	5	20	
d)	Liegt der Tank auf der Seite, so setzt sich die Füllhöhenfunktion H aus zwei Teilfunktionen zusammen, wobei die Füllhöhe von H_1 sich von 0 bis 30 cm erstreckt und die von H_2 von 30 bis 60 cm. Die Zunahme von H_1 (Ableitung) nimmt von der Füllhöhe 0 cm bis 30 cm ständig ab, da der Tankquerschnitt zunimmt. Bei der Funktion H_2 nimmt die Zunahme von der Füllhöhe 30 cm bis 60 cm ständig zu, da der Tankquerschnitt nun wieder geringer wird. Skizze: 		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20