Aufgabe 13: Schiffbau

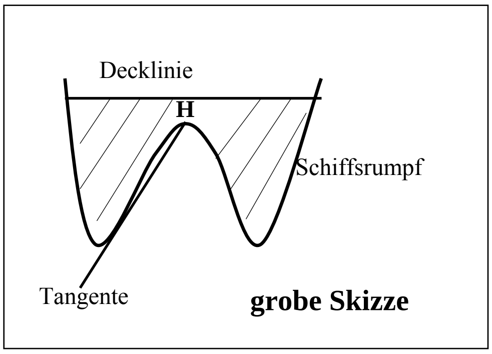
Auf einer Hamburger Werft wird eine Hochgeschwindigkeitsfähre als Doppelrumpfschiff (Katamaran) geplant. Der mittlere Teil des Schiffsrumpfes wird auf einer Länge von 12 m im Querschnitt nach der Funktion *f* mit $f(x) = 0{,}2 \cdot x^4 - 1{,}8 \cdot x^2$ hergestellt.

Die waagerechte Decklinie liegt in einer Höhe von 1 Einheit über dem Hochpunkt *H*.

a) - Zeigen Sie, dass die Funktion achsensymmetrisch ist.
- Ermitteln Sie den senkrechten Abstand der Tiefpunkte von der Decklinie.
- Berechnen Sie die Länge der Decklinie.
- Zeichnen Sie den Graphen von *f* zusammen mit der Decklinie in ein geeignetes Koordinatensystem mit 5 Einheiten in jede *x*-Richtung ein.

b) Im Hochpunkt *H* von *f* soll für Unterwasserbeobachtungen eine Kamera angebracht werden. Man möchte wissen, wie groß der Blickwinkel der Kamera in Richtung Meeresgrund ist. Hierzu muss man zwei Tangenten durch den Punkt *H* an den Schiffsrumpf *f* legen.

Bestimmen Sie die Gleichung einer dieser Tangenten an *f* und den Blickwinkel.



c) Damit das Schiff „unsinkbar“ ist, soll der Doppelrumpf des Schiffes mit Styropor bis zur Höhe des Punktes *H* ausgefüllt werden.
Berechnen Sie das Volumen an Styropor in den mittleren 12 m des Schiffes.

d) Die Werft plant, einen größeren Katamaran herzustellen. Die Decklinie soll dabei um 2 Einheiten verlängert werden. Die Abstände zwischen der Decklinie und dem Hochpunkt bzw. zwischen der Decklinie und den Tiefpunkten soll erhalten bleiben.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung einer der neuen Schiffsbreite angepassten Funktion *g* und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen in dem bereits erstellte Koordinatensystem.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Achsensymmetrie bedeutet, dass $f(x) = f(-x)$ gilt. Bei geraden Exponenten ist diese Bedingung immer erfüllt.

Ermittlung der Tiefpunkte:
Es sind die Lösungen von $f'(x) = 0$ zu suchen. Mit Hilfe des Ableitungsterms $f'(x) = 0{,}8x^3 - 3{,}6x$ ergibt sich:

$0{,}8x^3 - 3{,}6x = 0{,}8x(x^2 - \frac{9}{2}) = 0$.

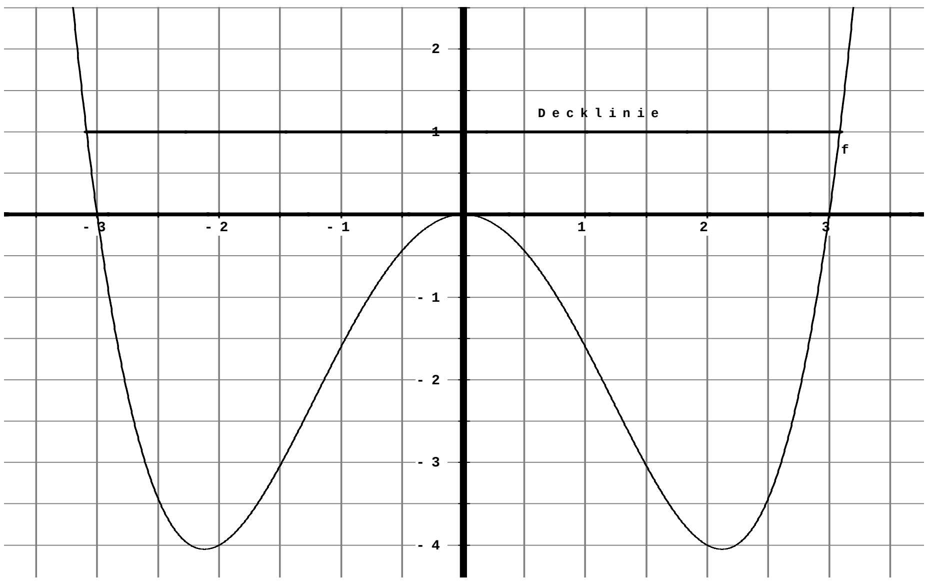
Also hat der Graph an den Stellen
$x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$ und $x_3 = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx -2{,}12$ waagerechte Tangenten.

Da diese ganzrationale Funktionen 4. Grades einen positivem Leitkoeffizienten hat und demnach nach oben geöffnet ist, liegt bei $x_1 = 0$ ein Maximum und jeweils bei x_2 und x_3 ein Minimum. Der Hochpunkt H hat die Koordinaten (0 | 0) und die Tiefpunkte die Koordinaten $\left(3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \,|\, \frac{81}{20}\right) \approx (2{,}12 \,|\, -4{,}05)$ sowie $\left(-3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \,|\, \frac{81}{20}\right) \approx (-2{,}12 \,|\, -4{,}05)$.

Da die Decklinie laut Aufgabenstellung 1 Einheit über dem Hochpunkt liegt, beträgt der Abstand zwischen Decklinie und Tiefpunkt 5,05 Einheiten.

Länge der Decklinie:

Zu lösen ist folgende biquadratische Gleichung:
$0{,}2x^4 - 1{,}8x^2 = 1$. Es sei $x^2 = z$, und man erhält die quadratische Gleichung in z:
$0{,}2z^2 - 1{,}8z = 1$ mit den Lösungen $z_1 \approx 9{,}52$ und $z_2 \approx -0{,}52$.
Zurückgerechnet auf die Variable x ergeben sich die beiden Lösungen $x_1 \approx 3{,}09$ und $x_2 \approx -3{,}09$. Da z_2 negativ ist, gibt es keine weiteren Lösungen.

Die Länge der Decklinie beträgt also 6,18 Einheiten.


</td><td>10</td><td>25</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Die gesuchte Gerade t verläuft durch den Koordinatenursprung, der mit H identisch ist, sie hat also die Gleichung $t(x) = m \cdot x$. Gesucht ist die Gerade mit maximaler Steigung durch H und durch einen auf dem Graphen von f liegenden Punkt $S\left(s \,\middle|\, 0,2s^4 - 1,8s^2\right)$. Die Gerade durch H und S hat als Term $m(s) \cdot x$, wobei $m(s)$ die von s abhängige Steigung der Geraden ist. Da S auf dem Graphen liegt, gilt $m(s) \cdot s = 0,2s^4 - 1,8s^2$. Nach Division durch $s \neq 0$ ergibt sich $m(s) = 0,2s^3 - 1,8s$. Die Ableitung der Steigung der Geraden $m'(s) = 0,6s^2 - 1,8$ wird Null gesetzt: $m'(s) = 0,6s^2 - 1,8 = 0$, um die maximale Steigung zu bestimmen:

$$0,6s^2 - 1,8 = 0 \,|: 0,6$$
$$s^2 - 3 = 0$$

Damit sind $s_1 = \sqrt{3}$ und $s_2 = +\sqrt{3}$ Lösungen der Gleichung und diejenigen Stellen, an denen die Steigung extremal sind. Die Steigung der Geraden erhält man durch die Steigung der Funktion f an den Stellen s_1 und s_2: eingesetzt ergibt sich $f'(\sqrt{3}) = 0,8\sqrt{3}^3 - 3,6\sqrt{3} \approx -2,08$

Eine der gesuchten Geraden hat somit die Gleichung $t_1(x) = -2,08x$.

Hinweis: Eine Lösungsalternative führt über die Tangentengleichung $t(x) = f'(s) \cdot (x - s) + f(s)$ zur Lösung.

Der Winkel zwischen der Tangenten und der x-Achse berechnet sich aus $\tan\alpha_x = f'(\sqrt{3})$ bzw. $\alpha_x = \tan^{-1}(f'(\sqrt{3}) \approx 64,3°$. Der Winkel α_y zwischen der y-Achse und der Tangente ist somit etwa $90° - 63,4° = 26,6°$ groß. Der Blickwinkel hat nun die doppelte Größe wie α_y, er ist also etwas 53,2° groß.
</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
Zu berechnen ist zuerst die Querschnittsfläche. Dazu müssen die Nullstellen von f ausgerechnet werden.

$$0,2x^4 - 1,8x^2 = 0$$
$$0,2x^2(x^2 - 9) = 0$$

Die Nullstellen ergeben sich zu $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = \sqrt{9} = 3$ und $x_{N3} = -\sqrt{9} = -3$
Unter Ausnutzung der Symmetrie ergibt sich die Querschnittsfläche A aus:

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^3 \left(0,2x^4 - 1,8x^2\right) dx \right| = 12,96.$$

Da $V = A \cdot l$ und $l = 12$ m, ergibt sich ein Volumen von ca. 156 m³.
</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Hier werden zwei Lösungsvarianten vorgestellt.

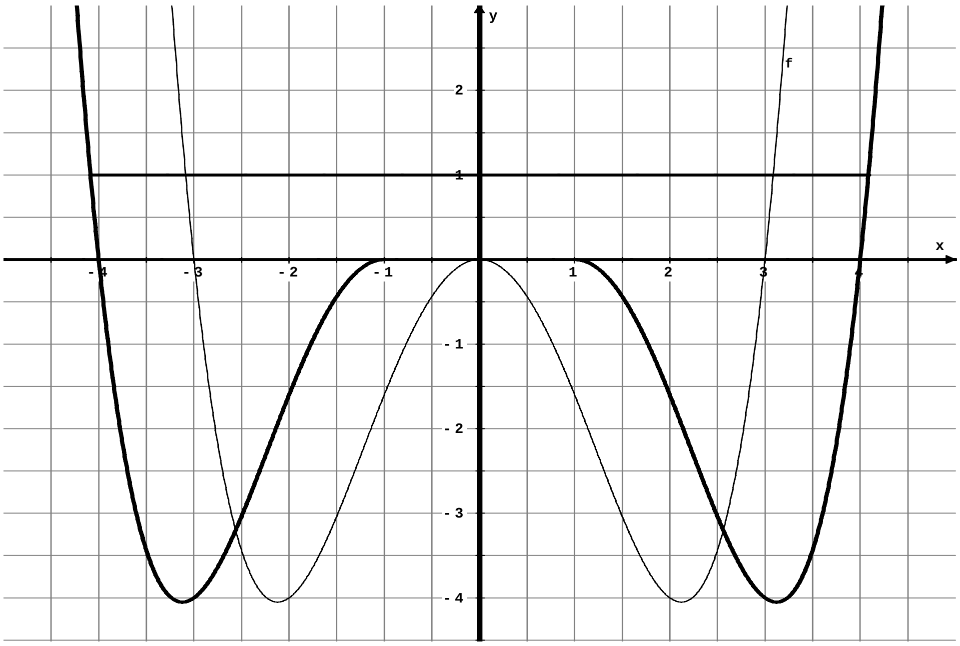
1.Lösungsvorschlag:

So wie die Aufgabe gestellt ist, besteht eine einfache Lösungsvariante darin, den Schiffsrumpf in der Mitte „aufzuschneiden“ und einen quaderförmigen Rumpfteil einzuschweißen (im Schiffsbau durchaus üblich). Dann müsste man die gesuchte neue Querschnittsfunktion stückweise definieren, also:
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x+1), & \text{falls } x \le -1 \\ 0, & \text{falls } -1 < x \le 1 \\ f(x-1), & \text{falls } 1 < x \end{cases}$$

Diese Lösungsvariante wird vermutlich selten von den Schülern gewählt, sie sollte aber voll anerkannt werden, obwohl sie im Gegensatz zu den folgenden Varianten keinen Rechenaufwand erfordert, da sie von inhaltlichem und nicht von formalem Denken bestimmt ist.

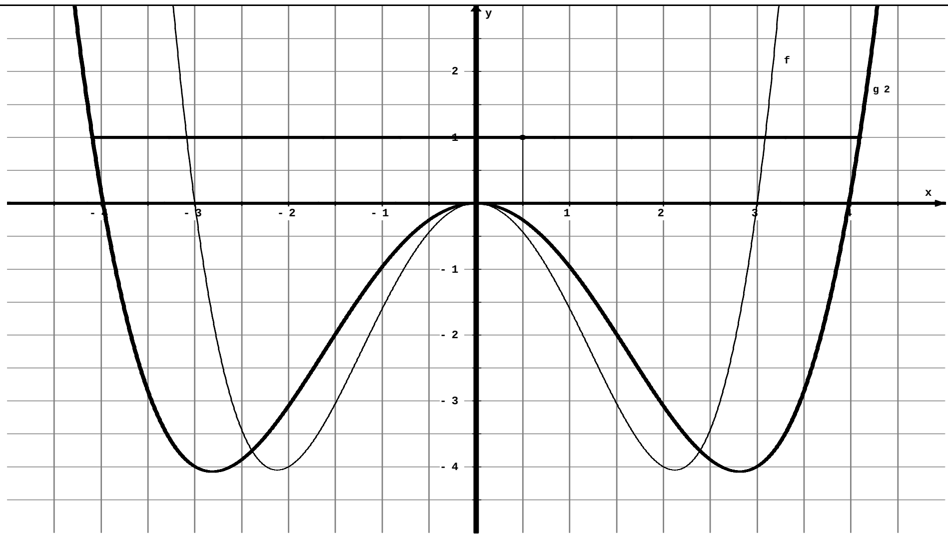


2. Lösungsvorschlag:
Da sich die Extremwerte der gesuchten neuen Funktion g_2 für den Querschnitt des verbreiterten Schiffrumpfes nicht verändern sollen, bietet es sich an, die Originalfunktion f in x-Richtung zu „strecken" also mit folgendem Ansatz zu arbeiten: $g_2(x) = f(a \cdot x)$. Wenn die Breite des Schiffes in Höhe der Decklinie um 2 Einheiten größer werden soll, so rücken die entsprechenden x-Werte jeweils um eine Einheit von der y-Achse weg, also z.B. von 3,08 auf 4,08 Einheiten.

Dies erreicht man, indem man $a = \dfrac{3,09}{4,09} \approx 0,756$ wählt.

Also:. $g_2(x) = 0,2(0,756x)^4 - 1,8(0,756x)^2 \;\Leftrightarrow\; g_2(x) = 0,065x^4 - 1,029x^2$.

I	II	III
5	10	10

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>