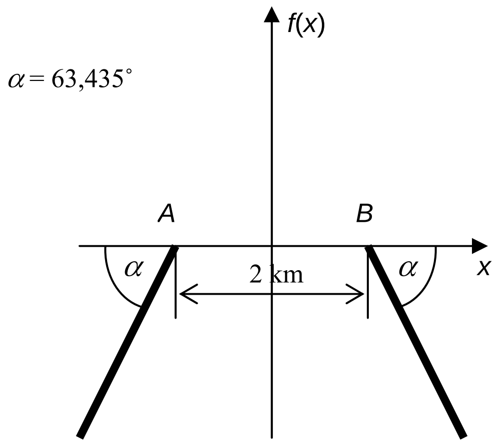
Aufgabe 11 ICE-Trasse

Für eine ICE-Trasse müssen zwei gerade Streckenabschnitte miteinander verbunden werden.

Es stehen 4 verschiedene Funktionsvarianten zur Diskussion:

1. Eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades
2. Eine Funktion, deren Graph ein Kreisbogen ist
3. Eine Winkelfunktion der Form $x \to a \cdot \cos(b \cdot x) + c$
4. Eine Exponentialfunktion der Form $x \to a \cdot e^{-b \cdot x^2} + c$



a) Beschreiben Sie die Anforderungen, die an den Verbindungsgraphen gestellt werden müssen, und geben Sie die mathematischen Bedingungen an.
Gehen Sie dabei davon aus, dass die y-Achse die Strecke zwischen A und B halbiert und im Koordinatensystem 1 Längeneinheit 1 km entspricht.

b) Eine der angegebenen Funktionsarten kann nicht alle erforderlichen Bedingungen erfüllen und kommt daher nicht in Frage.
Geben Sie an, welche Funktion das ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der drei anderen Funktionen.
Gehen Sie dabei davon aus, dass die Graphen dieser Funktionen symmetrisch zur y-Achse sind.

d) Um die Verbindungstrasse mit möglichst hoher Geschwindigkeit durchfahren zu können, soll von den drei Funktionen die Variante gewählt werden, welche an der Stelle $x = 0$ den größten Krümmungsradius hat.
Der Krümmungsradius einer Funktion kann mit Hilfe folgender Formel berechnet werden:

$$r = \left| \frac{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}{f''(x)} \right| .$$

Weisen Sie nach, dass die ganzrationale Funktion diese Forderung am besten erfüllt.

e) Um die Bahntrasse realisieren zu können, muss die Fläche zwischen der Verbindungstrasse und der Geraden zwischen den Anschlusspunkten A und B von einem Landwirt gekauft werden.
Berechnen Sie diese Fläche für die ganzrationale Funktion.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Verbindungstrasse muss die Anschlusspunkte A und B mit der gleichen Steigung wie die Geraden und ohne Krümmungsruck verbinden. Daraus ergeben sich folgende Bedingungen: 1. $f(-1) = f(1) = 0$ 2. $f'(-1) = \tan 63{,}435 = 2, \quad f'(1) = -2$ 3. $f''(-1) = f''(1) = 0$		10	10
b)	Ein Kreisbogen kann die Bedingung 3.) nicht erfüllen, da die 2. Ableitung konstant ungleich Null ist, und scheidet daher aus.		10	
c)	1. Ganzrationale Funktion: Da die Verbindungstrasse achsensymmetrisch ist, hat die Funktion nur gerade Exponenten. Eine quadratische Funktion kann die dritte Bedingung nicht erfüllen (keine Wendepunkte). Die Funktion hat daher die Form $f_1(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$ $f_1(1) = 0: \quad 0 = a_4 + a_2 + a_0$ $f_1'(1) = -2: \quad -2 = 4a_4 + 2a_2 + a_0$ $f_1''(1) = 0: \quad 0 = 12a_4 + 2a_2\,.$ Durch Lösen des LGS ergeben sich die Koeffizienten: $a_4 = \frac{1}{4}\ ,\ a_2 = -\frac{3}{2}\ ,\ a_0 = \frac{5}{4}$ $f_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}\,.$ 3. Winkelfunktion: $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$ Da die Kosinusfunktion in ihren Wendepunkten den Funktionswert $f(x) = 0$ hat, ist $c = 0$. Die Nullstellen der Funktion liegen bei $x = -1$ und $x = 1$, daher ist $b = \frac{\pi}{2}$. $f'(x) = -\frac{\pi}{2}a \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)$ $f'(1) = -\frac{\pi}{2}a = -2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{\pi}$ $f(x) = \frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)$ 4. Exponentialfunktion: $f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x^2} + c$ $f(1) = 0: \quad 0 = a \cdot e^{-b} + c$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$f(1) = -2$: $\quad -2 = -2abe^{-b}$ $f'(x) = a(-2bx)\cdot e^{-bx^2}$ $f''(x) = e^{-bx^2}(-2ab + 4ab^2x^2)$ $f''(1) = e^{-b}(-2ab + 4ab^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2ab = 4ab^2$ $\Rightarrow \quad b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{e} \quad \Rightarrow \quad c = -2$ $f(x) = 2\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2} - 2$		15	15
d)	Die Krümmungsradien an der Stelle $x = 0$ betragen: 1. Ganzrationale Funktion: $r = \frac{1}{3}$ 2. Winkelfunktion: $r = \frac{1}{\pi} = 0{,}318$ 3. Exponentialfunktion: $r = \frac{1}{2\sqrt{e}} = 0{,}303$ Da die ganzrationale Funktion an der Stelle x = 0 den größten Radius aufweist, kann diese Variante mit der größten Geschwindigkeit durchfahren werden und sollte aus dieser Sicht gewählt werden.		30	
e)	$A = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\cdot\left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x + C\right]_0^1 = 1{,}6$ Die Fläche beträgt 1,6 km^2.	10		
	Insgesamt 100 BWE	10	65	25