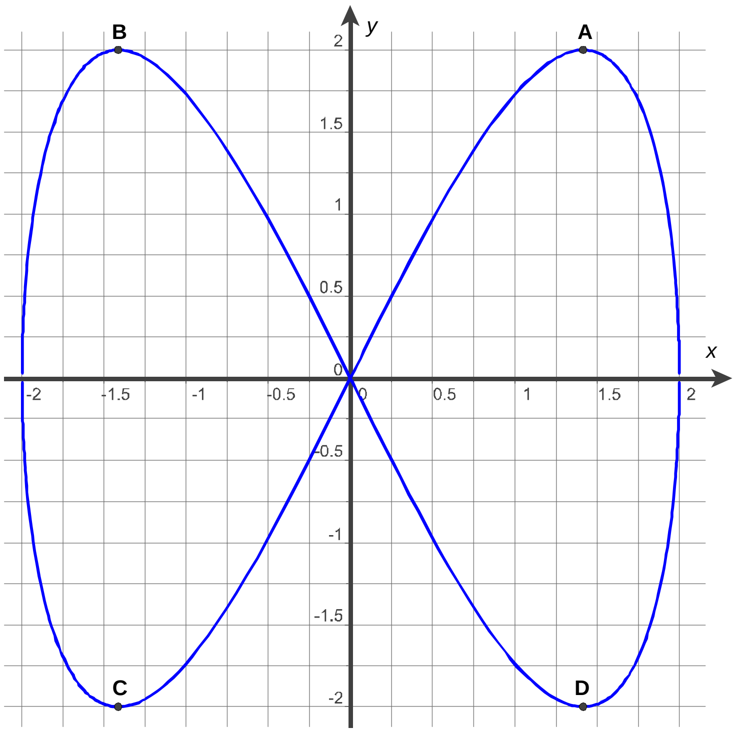
Aufgabe 4 Schulhofgestaltung

Der Leistungskurs Mathematik soll im Rahmen eines Projektes Vorschläge für die Neugestaltung des Schulhofes vorlegen. Die Schüler und Schülerinnen schlagen vor, eine Fahrradbahn zu bauen. Es wird die nebenstehende Skizze vorgelegt.
(Die Breite der Bahn soll nicht berücksichtigt werden.)

Maßstab: 1 Einheit entspricht 10 m



a) Begründen Sie, dass die Bahn durch eine Gleichung der Form $y^2 = a \cdot x^2 - x^4$ $(a > 0)$ beschrieben werden kann,
bestimmen Sie den Wert von a und ermitteln Sie für diesen Wert die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, sodass ebenfalls $y \in \mathbb{R}$.

b) Begründen Sie, warum zum Beschreiben der Bahn mit Hilfe von Funktionen zwei Funktionen f und g benötigt werden und geben Sie begründend deren Funktionsterme $f(x)$ und $g(x)$ an.

Die folgenden Überlegungen sollen für $a = 4$ durchgeführt werden.

c) Untersuchen Sie die Umgebung der gemeinsamen Punkte der Funktionen f und g im Hinblick auf „Knicks" im Bahnverlauf.
Begründen Sie, warum man mit dem Fahrrad die Bahn von A nach C und dann nach B und D und nicht in der Reihenfolge von A nach B und dann nach C und D durchfahren sollte, wenn man mit hoher Geschwindigkeit fahren möchte.

d) Auf der eingeschlossenen, rechten Teilfläche soll ein Baum gepflanzt werden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Pflanz-Punktes so, dass dieser Punkt in y-Richtung jeweils den gleichen maximalen Abstand zur Bahn hat. Berechnen Sie diesen Abstand.

e) Die eingeschlossene Gesamtfläche soll mit Rasen eingesät werden. Wie groß ist die Samenmenge, die gekauft werden muss, wenn man pro m² 25g benötigt?

f) Aus Platzgründen muss die Bahn doch verkleinert werden und zwar so, dass der in y-Richtung am weitesten entfernte Punkt nicht mehr 20 m sondern 15 m von der x-Achse entfernt ist. Die Form der Bahn soll beibehalten werden.
Welche Auswirkungen hat diese Maßnahme auf die Funktionsterme von f und g, auf den Bahnverlauf in der Umgebung der gemeinsamen Punkte, auf das Pflanzloch für den Baum und auf die Größe der Rasenfläche?
Bestimmen Sie die Veränderungen ohne viel zu rechnen und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Der Graph ist symmetrisch zur x-Achse, d.h. bis auf die drei Nullstellen (–2|0), (0|0) und (2|0) gibt es zu jeder x-Koordinate im Intervall [–2;2] zwei Punkte, die sich nur im Vorzeichen der y-Koordinate unterscheiden. Das trifft für die angegebene Gleichung zu, da die y-Koordinate quadriert ist, das Vorzeichen also keine Rolle spielt. Der Graph ist jedoch auch symmetrisch zur y-Achse, welches die rechte Seite der Gleichung garantiert, die aus einem Polynom mit nur graden Exponenten besteht. Damit geht der Graph auch durch den Ursprung. Die konkrete Form des Graphen hängt von a ab. Aus der Nullstelle bei (2|0) folgt $0 = 4a - 16$, also $a = 4$. Die Koordinaten von A sind nach der Skizze etwa $x_A \approx 1{,}4$ und $y_A = 2$. Damit erfüllt auch A wohl die Gleichung, denn $4 \approx 4 \cdot 1{,}96 - 3{,}8416 = 3{,}9984$ und damit aus Symmetriegründen auch B, C und D. Für $\lvert x\rvert > 2$ wird $4x^2 - x^4 = x^2\,(4 - x^2)$ negativ, weil dann $x^2 > 4$ ist. In diesem Fall ist $y \notin \mathbb{R}$. Sonst ist der Term nicht negativ. Die gesuchte Menge ist daher $x \in [-2;2]$. Das entspricht ebenfalls dem Graphen. *Hinweis: An dieser Stelle könnte auch der 1. Teil von Aufgabenteil c) bearbeitet werden, um die Übereinstimmung Term-Graph besser zu belegen.*	10	10	5
b)	Bei einer Funktion ist jeder x-Koordinate (aus der Definitionsmenge) genau eine y-Koordinate zugeordnet, hier bis auf die Nullstellen zwei, die man je einer Funktion zuordnen kann, also z.B. den Graphen oberhalb der x-Achse der Funktion f, den Graphen unterhalb der x-Achse der Funktion g. Die Doppeldeutigkeit in der Gleichung $y^2 = 4x^2 - x^4$ kann durch Radizieren beseitigt werden und bei g_a durch zusätzliche Multiplikation mit –1: $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ und $g(x) = -\sqrt{4x^2 - x^4}$ mit $D_f = D_g = [-2;2]$.	5	5	
c)	Gemeinsame Punkte der beiden Graphen sind bei den 3 Nullstellen: –2, 0, 2. Die Graphen gehen an diesen Stellen jeweils stetig in einander über. Um das Steigungsverhalten zu untersuchen, betrachtet man die erste Ableitung. Diese bildet man mit der Kettenregel. Es folgt dann: $f' : x \to \dfrac{4x - 2x^3}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$ mit $D_{f'} = D_f \setminus \{-2;\,0;\,2\}$. Da der Nenner der ersten Ableitung an den Definitionsrändern nicht definiert ist, besitzt die erste Ableitung dort jeweils eine Polstelle. Der Graph von f trifft also senkrecht auf die x-Achse. Da dies auch entsprechend für $g(x)$ gilt, gehen die beiden Graphen an den Rändern ohne Knick und Sprung in einander über. Auch die Nullstelle $x_3 = 0$ von $f(x)$ ist eine Definitionslücke von $f'(x)$. Im Fall $x < 0$ gilt: $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left(4 - 2x^2\right)}{\lvert x\rvert\sqrt{4 - x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\left(4 - 2x^2\right)}{\sqrt{4 - x^2}} = -2$. Im Fall $x > 0$ gilt: $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left(4 - 2x^2\right)}{\lvert x\rvert\sqrt{4 - x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(4 - 2x^2\right)}{\sqrt{4 - x^2}} = 2$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$f'(x)$ ist somit an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ergänzbar und f an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

Der Graph von f besitzt dort also einen Knick.

Entsprechende Überlegungen gelten auch für $g(x)$ an der Stelle 0.

Nähert man sich nun aber der Stelle 0 von rechts und betrachtet die Steigung von f und ebenso der Stelle 0 von links und betrachtet $g(x)$, so erkennt man, dass die Graphen ohne Knick und Sprung an der Stelle 0 in einander übergehen. Entsprechendes gilt für die spiegelbildliche Variante.

Nähert man sich nun von A kommend der Stelle 0, so kann man ohne die Geschwindigkeit zu vermindern über diese Stelle zum Punkt C fahren – vorausgesetzt, man ist allein auf der Bahn. Will man jedoch von A direkt nach B fahren, muss man, da der Bahnverlauf einer „spitzen Kehre“ folgt, zunächst die Geschwindigkeit deutlich verringern, um nicht aus der Bahn getragen zu werden.</td><td>5</td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Wenn der Punkt für das Pflanzloch sowohl nach unten wie nach oben den gleichen maximalen Abstand zur Bahn hat, dann muss er sich auf Grund des Symmetrieverhaltens auf der x-Achse befinden. Die genaue Stelle wird durch den x-Wert des Maximums angegeben. Um diese Stelle zu bestimmen, berechnet man die Nullstellen der 1. Ableitung, die in diesem Fall die Nullstellen des Zählerpolynoms der 1. Ableitung sind. Man erhält:

$$x \cdot (4 - 2x^2) = 0$$

Da 0 nicht zum Definitionsbereich der 1. Ableitung gehört, kann nur der 2. Faktor den Wert 0 annehmen. Nach einfachen Umformungen folgt für die mögliche Extremstelle: $x = \sqrt{2}$. Weitere Extremstellen gibt es nicht, da nur die rechte Teilfläche betrachtet werden soll.

Um nachzuweisen, dass dort tatsächlich ein Maximum vorliegt, bildet man z.B. die 2. Ableitung an dieser Stelle. Dazu muss man innerhalb der Quotientenregel die Kettenregel anwenden. Mit einigen Umformungen folgt:

$$f''(x) = \frac{2x^6 - 12x^4}{\sqrt{4x^2 - x^4}^3}.$$

Das Vorzeichen der 2. Ableitung wird hier bestimmt durch den Zähler, denn der Nenner kann nicht negativ werden. Setzt man in den Zähler für x den Wert $\sqrt{2}$ ein, so erhält man $2 \cdot 8 - 12 \cdot 4 < 0$. Folglich liegt dort ein Maximum.

Der Nachweis für ein Maximum kann auch über einen Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung nachgewiesen werden. Das Vorzeichen im Bereich von $\sqrt{2}$ wird bestimmt durch den Faktor $(4 - 2x^2)$ im Zähler: für $0 < x < \sqrt{2}$ ist der Faktor positiv, der Graph steigt also monoton. Für $x > \sqrt{2}$ ist der Faktor negativ, der Graph fällt. Damit liegt ein Maximum vor.

Der Pflanzpunkt P liegt also bei $P(\sqrt{2} \mid 0)$.

Um den Abstand in y-Richtung zu berechnen, bestimmt man $f(\sqrt{2})$ und erhält den Wert 2.</td><td>5</td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Aus Symmetriegründen gilt für den gesuchten Flächeninhalt A:
$A = 4\int_0^2 f(x)\,dx = 4\int_0^2 \sqrt{4x^2 - x^4}\,dx = 4\int_0^2 \sqrt{x^2\left(4 - x^2\right)}\,dx.$
Die Berechnung des Integrals erfolgt mit Hilfe der Substitutionsregel unter Verwendung der Substitution $t = 4 - x^2$.
$A = 4\cdot(-\frac{1}{2}\int_4^0 \sqrt{t}\;dt) = -2\cdot\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_4^0 = \frac{4}{3}\sqrt{4^3} = \frac{32}{3}.$
Da eine Längeneinheit 10 m entspricht, benötigt man ungefähr 26,7 kg Samen.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Wenn die Bahn wie angegeben unter Beibehaltung der Form verkleinert werden soll, so bedeutet dies eine Stauchung um den Faktor $\frac{3}{4}$.
Also folgt für den Funktionsterm des Graphen im 1. Quadranten:
$f(x) = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{4x^2 - x^4}$.
Die Multiplikation mit einem konstanten Faktor hat keine Auswirkungen die Lage der Extremstelle und damit auf die Lage des Pflanzloches. Die „spitze Kehre“ wird etwas abgeflacht. Die Größe der Rasenfläche wird um diesen Faktor verändert, so dass man nun eine Fläche von 3 200 m² einsäen kann, also 80 kg Samen kaufen muss.</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>