Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen II - Anwendungsaufgabe 6 - Lösung

a) Zuerst stieg die Förderrate an, da wahrscheinlich immer mehr Bohrlöcher gebohrt wurden und deshalb immer mehr Öl gefördert werden konnte. Nachdem die Förderrate einen maximalen Wert erreicht hatte, fielsie wieder ab, da die Ölvorräte langsam weniger wurden und das Öl schließlich nicht mehr 'aus dem Boden schoss', sondern aus dem Boden gepumpt werden musste.

$$f(t) := \frac{-5}{24} \cdot t^4 + 5 \cdot t^3 - 40 \cdot t^2 + \frac{320}{3} \cdot t \qquad \text{"Done"}$$

b) Bilden einer beliebigen Stammfunktion ...

$$\int (f(t))\, dt + c \qquad \frac{-(t^5)}{24} + \frac{5 \cdot t^4}{4} - \frac{40 \cdot t^3}{3} + \frac{160 \cdot t^2}{3} + c$$

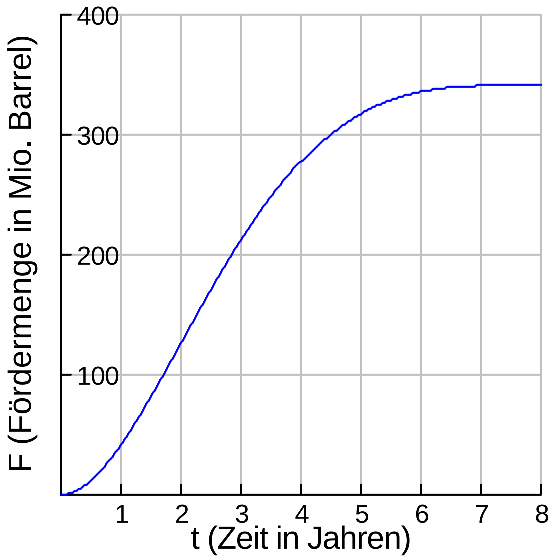
$$\mathrm{sf}(t) := \frac{-(t^5)}{24} + \frac{5 \cdot t^4}{4} - \frac{40 \cdot t^3}{3} + \frac{160 \cdot t^2}{3} + c \qquad \text{"Done"}$$

... und Bestimmen des Parameters c so, dass F(0)=0:

$$\mathrm{solve}(\mathrm{sf}(0) = 0, c) \qquad c = 0$$

$$\mathrm{sf}(t) := \frac{-(t^5)}{24} + \frac{5 \cdot t^4}{4} - \frac{40 \cdot t^3}{3} + \frac{160 \cdot t^2}{3} + 0 \qquad \text{"Done"}$$

Hier der Graph von F:



c) Die Änderung der Förderrate an der Stelle 0, multipliziert mit dem Zeitraum 0,5 (Jahre) liefert einen Prognosewert für die Förderrate zum Zeitpunkt 0,5 (Jahre).

Bestimmen der ersten Ableitung der Förderrate:

$$\frac{d}{dt}(f(t)) \qquad \frac{-5 \cdot t^3}{6} + 15 \cdot t^2 - 80 \cdot t + \frac{320}{3}$$

$$fs(t) := \frac{-5 \cdot t^3}{6} + 15 \cdot t^2 - 80 \cdot t + \frac{320}{3} \qquad \text{"Done"}$$

Berechnen des Wertes der ersten Ableitung der Förderrate an der Stelle 0:

$$fs(0.0) \qquad 106.667$$

Berechnen des Prognosewertes:

$$fs(0.0) \cdot 0.5 \qquad 53.3333$$

Berechnen des tatsächlichen Wertes:

$$f(0.5) \qquad 43.9453$$

Unterschiede, weil der Anstieg der Förderrate zu Beginn am stärksten war.

d) Berechnen des Bestimmten Integrals über die Förderrate über das Intervall [0;1]:

$$\int_{0.0}^{1.0} (f(t))\, dt \qquad 41.2083$$

e) Bestimmen der Stellen, an denen die Förderrate 30 (Millionen Barrel pro Jahr) beträgt:

$$\text{solve}(f(t) = 30.0, t) \qquad t = 4.91777 \text{ or } t = .317593$$

f) Gesucht ist das absolute Maximum der Förderrate. Am Graph erkennt man, dass sich dieses nur im Innern des Definitionsbereichs befinden kann, also ein relatives Maximum sein muss.

Bestimmen der relativen Maxima der Förderrate ...

$$\text{solve}(fs(t) = 0, t) \qquad t = 8 \text{ or } t = 2$$

Als Kandidat kommt lediglich 2 in Frage. Bestimmen der zweiten Ableitung ...

$$\frac{d^2}{dt^2}(f(t)) \qquad \frac{-5 \cdot t^2}{2} + 30 \cdot t - 80$$

$$fss(t) := \frac{-5 \cdot t^2}{2} + 30 \cdot t - 80 \qquad \text{"Done"}$$

... und Einsetzen des Kandidaten:

$$fss(2) \qquad -30$$

Bei 2 liegt also das relative Maximum (im Definitionsbereich) der Förderrate vor.

Da die Förderrate angibt, mit welcher Ölmenge bei gleicher Förderung im nächsten Jahr zu rechnen ist, kann man mit einer voraussichtlichen Fördermenge von $f(2)$ 90 Millionen Barrel im nächsten Jahr rechnen. Der tatsächliche Wert ergibt sich allerdings mit Hilfe des bestimmten Integrals über die Förderrate über das Intervall [2;3]:

$$\int_{2.0}^{3.0} (f(t))\,dt \qquad 85.7917$$

g) Gesucht ist eine Wendestelle mit negativer Steigung. Bestimmen der Wendestellen der Förderrate:

$$\text{solve}(\text{fss}(t) = 0, t) \qquad t = 8 \text{ or } t = 4$$

Als Kandidat kommt lediglich 2 in Frage. Bestimmen der dritten Ableitung ...

$$\frac{d^3}{dt^3}(f(t)) \qquad 30 - 5\cdot t$$

$$\text{fsss}(t) := 30 - 5\cdot t \qquad \text{"Done"}$$

... und Einsetzen des Kandidaten:

$$\text{fsss}(4.0) \qquad 10.$$

4 ist also die Wendestelle (im Definitionsbereich) der Förderrate. Einsetzen in die erste Ableitung ergibt ...

$$\text{fs}(4.0) \qquad -26.6667$$

Also ist an der Stelle 4 der stärkste Abfall der Förderrate mit ...

$$f(4.0) \qquad 53.3333$$

h) Berechnen des Funktionswertes an der Stelle 8:

$$f(8) \qquad 0$$

i) Berechnen des Bestimmten Integrals über die Förderrate über das Intervall [0;8]:

$$\int_{0.0}^{8.0} (f(t))\,dt \qquad 341.333$$