

Name:

Datum:

Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen II - Wachstum einer Hopfenpflanze - Lösung

- a) • Der Graph stellt einen Anstieg der Wachstumsrate von 0cm pro Tag zum Zeitpunkt 0 Tage auf ein Maximum von etwas über 35cm Tag nach ca. 30 Tagen dar, und zwar in einer Rechtskurve.
• Die Änderung der Wachstumsrate ist in den ersten Tagen nahezu linear (schwache Rechtskrümmung)
• Nach 30 Tagen wird die Wachstumsrate wieder geringer, zunächst in einer Rechtskurve, ab etwa dem 60. Tag in einer Linkskurve.
• Nach ca. 90 Tagen ist die Wachstumsrate schließlich auf 0 cm/Tag gesunken.
- b) $w(20) = 98/3 \approx 32,7 \approx 33$; nach 20 Tagen beträgt die Wachstumsrate rund 33cm pro Tag.
- c) $w(t) = 0 \Leftrightarrow t \cdot (t^2 - 180 \cdot t + 8100) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee (t - 90)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 90$; zum Zeitpunkt des Keimens und 90 Tage nach Beginn der Keimung beträgt die Wachstumsrate jeweils 0cm pro Tag, sodass nach 90 Tagen das Wachstum abgeschlossen ist.
- d) 1. und 2. Ableitung: $w'(t) = \frac{1}{1000} \cdot t^2 - \frac{3}{25} \cdot t + \frac{27}{10}$; $w''(t) = \frac{1}{500} \cdot t - \frac{3}{25}$
 $w'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 120 \cdot t + 2700 = 0 \Leftrightarrow (t - 30) \cdot (t - 90) = 0 \Leftrightarrow t = 30 \vee t = 90$
Mit $w''(30) = -3/50 (< 0)$ (vergleiche auch Graph) und $w''(90) = 3/50 (> 0)$ sowie $w(30) = 36$ folgt, dass die Wachstumsrate nach 30 Tage maximal mit einem Maximum von 36cm pro Tag ist.
- e) $w'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 60$; da $w''(60) = 1/500$ ist, ist 60 eine Wendestelle des Graphen, dort ändert sich die Wachstumsrate am stärksten.
- f) Steigung der Wendetangente: $w'(60) = -0,9$; Somit ergibt sich der folgende Ansatz für den Term $w(t)$ der Wendetangente: $w(t) = -0,9 \cdot t + n$. Mit $w(60) = w(60) \Leftrightarrow -0,9 \cdot 60 + n = 18 \Leftrightarrow n = 72$ folgt: $w(t) = -0,9 \cdot t + 72$. Nullstelle der Wendetangente: $w(t) = 0 \Leftrightarrow t = 80$.
Deutung der Werte im Sinne der Sachaufgabe:
• $w'(60) = -0,9$: Nach 60 Tagen nimmt die Wachstumsrate pro Tag um 0,9 cm pro Tag ab (Minimum der Änderung der Wachstumsrate)
• Nullstelle der Wendetangente: Würde die Änderung der Wachstumsrate ab diesem Zeitpunkt konstant bleiben, so würde die Wachstumsrate für $t \geq 60$ durch den Verlauf der Wendetangente (konstante Steigung) beschrieben werden, sodass dann bereits nach 80 Tagen das Wachstum der Pflanze abgeschlossen wäre.
- g) Näherung H_N für die Gesamthöhe (in cm) :
 $H_N = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot w(30) + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot w(30) = 45 \cdot w(30) = 45 \cdot 36 = 1620$; die betrachtete Näherung liefert eine endgültige Höhe der Pflanze von rund 16m.
- h) Der gesuchte Term $h(t)$ muss zwei Bedingungen erfüllen: $h(t)$ muss eine Stammfunktion von $w(t)$ sein und es muss gelten: $h(0)=0$, da die Höhe der Pflanze im Moment der Keimung ja 0cm beträgt.
Mit $h(t) = \frac{1}{12000} \cdot t^4 - \frac{1}{50} \cdot t^3 + \frac{27}{20} \cdot t^2$ folgt $h'(t) = w(t)$ und $h(0) = 0$.
- i) $h(30) = 742,5$ und $h(90) = 1822,5$ (rund 7,4m und 18,2m)
- j) $h(t) = 700 \Leftrightarrow \frac{1}{12000} \cdot t^4 - \frac{1}{50} \cdot t^3 + \frac{27}{20} \cdot t^2 = 700$
- k) Mittlere Wachstumsgeschwindigkeit in cm pro Tag: $\bar{w} = \frac{h(90) - h(0)}{90} = \frac{1822,5}{90} = 20,25$.

Name:

Datum:

Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen II - Wachstum einer Hopfenpflanze - Lösung

l)

