

Wiederholung der Linearen und Quadratischen Funktionen - Arbeitsblatt 4 - Lösung

a) Der Zusammenhang zwischen Stückzahl und Umsatz wird durch eine quadratische Funktion beschrieben.

b) Der Funktionsterm lautet in Allgemeiner Form $u(z) = a \cdot z^2 + b \cdot z + c$ und in Scheitelpunktform $u(z) = a(z-d)^2 + e$.

Dabei gibt a jeweils den Öffnungs-, Streckungs- oder Stauchungsfaktor an, gibt also an, ob der Graph enger oder weiter als der Graph der Normalparabel verläuft. Zusätzlich gibt a die Öffnungsrichtung des Graphen an. Weiterhin gibt c die Schnittstelle des Graphen mit u -Achse bzw. den Funktionswert an der Stelle Null bzw. den Ordinatenabschnitt an. Die Parameter d und e liefern die Koordinaten des Scheitelpunktes, also $S(d | e)$.

c) • **graphisch:**

Die Koordinaten des Scheitelpunktes liegen bei $S(20000 | 40000)$, der Öffnungsfaktor a ist hier nicht ablesbar. Damit ergibt sich erst einmal $u(z) = a(z-20000)^2 + 40000$. Die Variation des Parameters a in einem Funktionsgraphenplotter ergibt eine Übereinstimmung der Graphen für $a = -0,0001$; also ergibt sich schließlich $u(z) = -0,0001 \cdot (z-20000)^2 + 40000$ oder nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen $u(z) = -0,0001z^2 + 4z$.

• **rechnerisch:**

$$35100 = u(13000)$$

$$38400 = u(16000)$$

$$39900 = u(19000)$$

$$\begin{array}{r|l}
 35100 = 169000000a + 13000b + c & \cdot (-1) \quad \neg \\
 38400 = 256000000a + 16000b + c & \quad \swarrow + \quad | + \\
 39900 = 361000000a + 19000b + c & \quad \quad \quad \swarrow \\
 \hline
 35100 = 169000000a + 13000b + c & \\
 3300 = 87000000a + 3000b & \cdot (-2) \quad \neg \\
 4800 = 192000000a + 6000b & \quad \swarrow + \\
 \hline
 35100 = 169000000a + 13000b + c & \\
 3300 = 87000000a + 3000b & \\
 -1800 = 18000000a & \Rightarrow a = -0,0001 \\
 \hline
 & \left. \begin{array}{l} \Rightarrow b = 4 \\ \Rightarrow c = 0 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$$0 = c$$

$$4 = b$$

$$-0,0001 = a$$

• **algebraisch:**

$$u(z) = p(z) \cdot z = (-0,0001z + 4) \cdot z = -0,0001z^2 + 4z$$

Daher lautet der Funktionsterm $u(z) = -0,0001z^2 + 4z$

- d) Einsetzen der Wertepaare in die Funktionsgleichung $u = -0,0001z^2 + 4z$ ergibt:
- $$35100 = -0,0001 \cdot 13000^2 + 4 \cdot 13000 \quad (w)$$
- $$36400 = -0,0001 \cdot 14000^2 + 4 \cdot 14000 \quad (w)$$
- u.s.w.

e) Siehe Lösung von Aufgabe 3.c)-e)

- f) Berechne z so, dass dessen Funktionswert 0 beträgt, also:
- $$u(z) = 0$$
- $$-0,0001z^2 + 4z = 0$$
- $$-0,0001 \cdot z \cdot (z - 40000) = 0$$
- $$z = 0 \quad \vee \quad z = 40000$$
- $$L = \{0; 40000\}$$

Der Vergleich mit dem Ergebnis aus Aufgabe 3.f) ist einmalig!

- g) Berechne zur Beantwortung der ersten Frage $u(9500) = -0,0001 \cdot 9500^2 + 4 \cdot 9500 = 28975$. Bei einer Auflage von 9500Stk liegt der Umsatz bei 28975,- €

Berechne zur Beantwortung der zweiten Frage z so, dass der Umsatz bei 30000,-€ liegt, also

$$u(z) = 30000$$

$$-0,0001z^2 + 4z = 30000$$

$$-0,0001z^2 + 4z - 30000 = 0$$

$$z^2 - 40000z + 300000000 = 0$$

Weiter entweder mit quadratischer Ergänzung ... oder aber mit der pq-Formel

$$z^2 - 40000z + (20000)^2 - (20000)^2 + 300000000 = 0$$

$$(z - 20000)^2 - 100000000 = 0$$

$$(z - 20000)^2 - 10000^2 = 0$$

$$(z - 20000 + 10000) \cdot (z - 20000 - 10000) = 0$$

$$z = 10000 \quad \vee \quad z = 30000$$

$$L = \{10000; 30000\}$$

$$z_{1/2} = 20000 \pm \sqrt{4 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^8}$$

$$z_{1/2} = 20000 \pm 10000$$

$$z_1 = 30000 \quad ; \quad z_2 = 10000$$

$$L = \{10000; 30000\}$$

Für einen Umsatz von 30000,-€ müssen von den Aufklebern 10000Stk oder 30000Stk produziert werden. Der Vergleich mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3.g) ist einmalig!

- h) Zur Beantwortung der vierten Frage wandelt man den Funktionsterm zuerst von der Allgemeinen Form in die Scheitelpunktform um:
- $$u(z) = -0,0001z^2 + 4z$$
- $$= -0,0001 \cdot [z^2 - 40000z]$$
- $$= -0,0001 \cdot [(z - 20000)^2 - 400000000]$$
- $$= -0,0001 \cdot (z - 20000)^2 + 40000$$

Dann argumentiert man entweder „Der größte Funktionswert einer nach unten geöffneten Parabel liegt an der Stelle des Scheitelpunktes, also bei $z = 20000$ “ oder aber „Der Umsatz u wird am größten, wenn von den 40000 nichts subtrahiert wird. Da das Quadrat immer ≥ 0 ist, ist der erste Summand immer ≤ 0 . Daher muss also gelten: $z = 20000$.“

Wie man es dreht und wendet: Bei einer Auflage von 20000Stk ist der Umsatz am größten und beträgt 40000,-€ Der Vergleich mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3.g) ist irre!