Name: **Datum:**

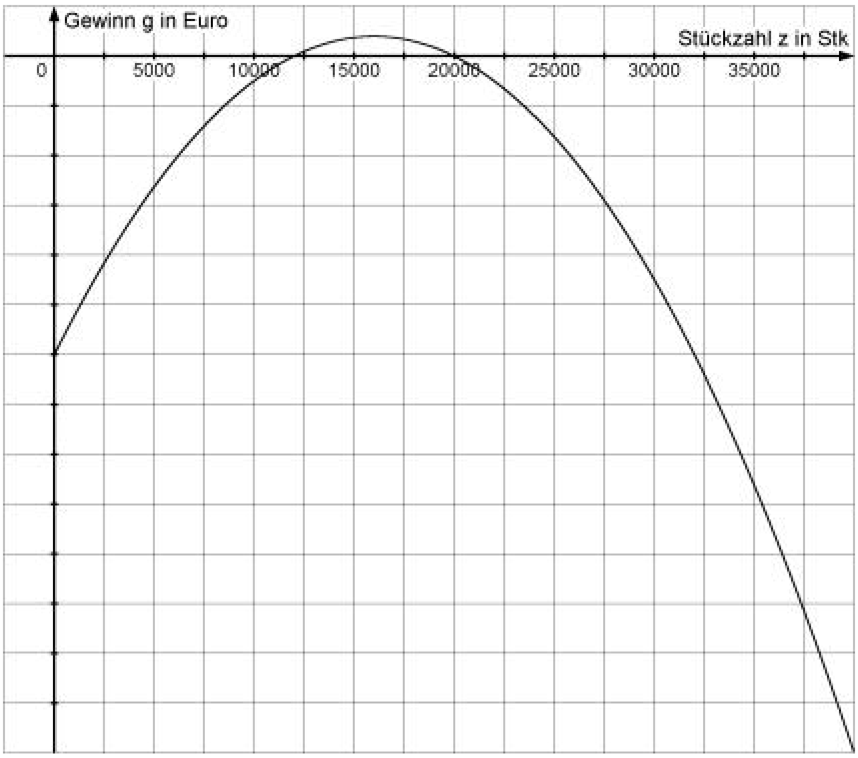
Wiederholung der Linearen und Quadratischen Funktionen - Arbeitsblatt 6 - Lösung

a) *„Ja können sie denn nicht Eins und Eins zusammenzählen? Die betriebswirtschaftliche Zielgröße, das sollten Sie aber auch wissen, ist nicht der Umsatz, sondern der Gewinn. Und der ist nun mal die Differenz von Umsatz und Kosten. Sie können sich doch denken, was ich wissen will: Machen wir bei einer Stückzahl von 9500 überhaupt Gewinn? Bei welcher Stückzahl machen wir einen Gewinn von 1000,-€? Bei welchen Stückzahlen machen wir überhaupt Gewinn? Und was mich am meisten interessiert: Bei welcher Stückzahl machen wir den größten Gewinn, und wie hoch ist der dann? Und zwar nicht nur über den Daumen gepeilt, sondern exakt. Oder wollen Sie vielleicht aufgrund von ein paar Bildchen die Firma in die Pleite treiben? Mit mir nicht! Hier geht's auf Nummer sicher. Rechnung!“*

b) Der Gewinn ist die Differenz aus Umsatz und Selbstkosten.

Stückzahl z in Stk	13000	14000	15000	16000	17000	19000	21000	23000
Umsatz u in €	35100	36400	37500	38400	39100	39900	39900	39100
Selbstkosten k in €	34400	35200	36000	36800	37600	39200	40800	42400
Gewinn g in €	+700	+1200	+1500	+1600	+1500	+700	-900	-3300

c)
d)



Abszisse: 1cm entspricht 2500Stk; Ordinate: 1cm entspricht 4000,-€. Der Graph ist eine Parabel.

(cc) BY-SA 2010 Dr. Martin Lehmann-Greif ; Stefan Thul ; Thomas Unkelbach

e) Der Zusammenhang zwischen Stückzahl und Gewinn wird durch eine quadratische Funktion beschrieben. Der Funktionsterm lautet in <u>Allgemeiner Form</u> oder <u>Normalform</u> $g(z) = a \cdot z^2 + b \cdot z + c$ und in <u>Scheitelpunktform</u> $g(z) = a(z-d)^2 + e$. Zur Bedeutung der Parameter siehe Arbeitsblatt 4.

f)

- **graphisch:**

  Die Koordinaten des Scheitelpunktes liegen bei $S(16000\,|\,1600)$. Der Faktor a ist hier nicht ablesbar. Daher: $g(z) = a(z-16000)^2 + 1600$

- **rechnerisch:**

$$\begin{aligned} 700 &= g(13000) \\ 1600 &= g(16000) \\ 700 &= g(19000) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 700 &= 169 \cdot 10^6 a + 13000b + c \\ 1600 &= 256 \cdot 10^6 a + 16000b + c \\ 700 &= 361 \cdot 10^6 a + 19000b + c \end{aligned}$$

  Wendet man nun dasselbe Verfahren an wie auf dem Arbeitsblatt 4, d.h. löst das lineare Gleichungssystem und bestimmt die Werte für die gesuchten Parameter, so erhält man

$$\begin{aligned} -24000 &= c \\ 3{,}2 &= b \\ -0{,}0001 &= a \end{aligned}$$

- **algebraisch:**

$$\begin{aligned} g(z) &= u(z) - k(z) \\ &= -0{,}0001z^2 + 4z - (0{,}8z + 24000) \\ &= -0{,}0001z^2 + 3{,}2z - 24000 \end{aligned}$$

Der Funktionsterm lautet also: $g(z) = -0{,}0001z^2 + 3{,}2z - 24000$

g) Einsetzen der Wertepaare in die Funktionsgleichung $g = -10^{-4} z^2 + 3{,}2z - 24000$ ergibt:

$$\begin{aligned} 700 &= -10^{-4} \cdot 169 \cdot 10^6 + 3{,}2 \cdot 13000 - 24000 \ \text{(w)} \\ 1200 &= -10^{-4} \cdot 196 \cdot 10^6 + 3{,}2 \cdot 14000 - 24000 \ \text{(w)} \\ 1500 &= -10^{-4} \cdot 225 \cdot 10^6 + 3{,}2 \cdot 15000 - 24000 \ \text{(w)} \\ 1600 &= -10^{-4} \cdot 256 \cdot 10^6 + 3{,}2 \cdot 16000 - 24000 \ \text{(w)} \\ 1500 &= -10^{-4} \cdot 289 \cdot 10^6 + 3{,}2 \cdot 17000 - 24000 \ \text{(w)} \\ 700 &= -10^{-4} \cdot 361 \cdot 10^6 + 3{,}2 \cdot 19000 - 24000 \ \text{(w)} \\ -900 &= -10^{-4} \cdot 441 \cdot 10^6 + 3{,}2 \cdot 21000 - 24000 \ \text{(w)} \\ -3300 &= -10^{-4} \cdot 529 \cdot 10^6 + 3{,}2 \cdot 23000 - 24000 \ \text{(w)} \end{aligned}$$

h) Sie Lösung zu den Aufgabeteilen **c)** und **d)**.

i) Berechne $g(9500) = -10^{-4} \cdot 9500^2 + 3{,}2 \cdot 9500 - 24000 = -2625$. Bei einer Produktion von 9500Stk wird demnach ein Gewinn von –2625,-€, also ein Verlust von 2625,-€ gemacht.

Berechne z so, dass:

$$\begin{aligned} g(z) &= 1000 \\ -10^{-4} z^2 + 3{,}2z - 24000 &= 1000 \\ -10^{-4} z^2 + 3{,}2z - 25000 &= 0 \\ z^2 - 32000z + 2{,}5 \cdot 10^8 &= 0 \end{aligned}$$

Hier mit quadratischer Ergänzung:

$$\begin{aligned} z^2 - 32000z + 16000^2 - 16000^2 + 2{,}5 \cdot 10^8 &= 0 \\ (z-16000)^2 - 6000000 &= 0 \\ (z-16000)^2 - (1000\sqrt{6})^2 &= 0 \\ (z-16000+1000\sqrt{6})(z-16000-1000\sqrt{6}) &= 0 \\ z = 16000 + 1000\sqrt{6} \ &\vee \ z = 16000 - 1000\sqrt{6} \\ z \approx 18450 \ &\vee \ z \approx 13550 \\ L &\approx \{13550; 18450\} \end{aligned}$$

Ein Gewinn von 1000,-€ wird erzielt, wenn entweder 13550Stk oder 18450Stk Aufkleber produziert werden.

Berechne z zunächst so, dass der Gewinn bei 0,-€ liegt, also

$$\begin{aligned} g(z) &= 0 \\ -10^{-4} z^2 + 3{,}2z - 24000 &= 0 \quad |: (-10^{-4}) \\ z^2 - 32000z + 2{,}4 \cdot 10^8 &= 0 \end{aligned}$$

Weiter entweder mit quadratischer Ergänzung ...

$$\begin{aligned} z^2 - 32000z + 16000^2 - 16000^2 + 2{,}4 \cdot 10^8 &= 0 \\ (z-16000)^2 - 16000000 &= 0 \\ (z-16000)^2 - 4000^2 &= 0 \\ (z-16000-4000) \cdot (z-16000+4000) &= 0 \\ z = 20000 \ &\vee \ z = 12000 \\ L &= \{12000; 20000\} \end{aligned}$$

... oder aber mit der p-q-Formel

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= 16000 \pm \sqrt{2{,}56 \cdot 10^8 - 2{,}4 \cdot 10^8} \\ &= 16000 \pm \sqrt{16000000} \\ &= 16000 \pm 4000 \\ z_1 &= 12000 \ ; \ z_2 = 20000 \\ L &= \{12000; 20000\} \end{aligned}$$

Der drittletzten Zeile links (!) entnehmen wir, dass der Gewinn genau dann positiv ist, wenn gilt: $12000 < z < 20000$. Andererseits kann man argumentieren, dass bei einer nach unten geöffneten Parabel die Funktionswerte zwischen den Nullstellen immer positiv sind. Das bedeutet also, dass bei Produktionen zwischen 12000Stk und 20000Stk (jeweils ausschließlich) Gewinn erwirtschaftet wird.

Berechne z so, dass der Gewinn, also g(z) maximal ist.

- **graphisch:**

  Der höchste Funktionswert einer nach unten geöffneten Parabel liegt an der Stelle des Scheitelpunktes. Also ist der Gewinn bei einer Produktion von 16000Stk am höchsten mit 1600,-€.

- **rechnerisch:**

  $$g(z) = -0{,}0001z^2 + 3{,}2z - 24000 = -0{,}0001(z-16000)^2 + 1600$$

  Da der erste Summand immer kleiner oder gleich Null ist und der zweite Summand immer größer als Null ist, kann man argumentieren, dass der Gewinn g genau dann maximal ist, wenn von den 1600 nichts subtrahiert wird, also wenn $z - 16000 = 0$ gilt. Dem entnehmen wir, dass bei einer Stückzahl von 16000Stk der Gewinn maximal wird und dann $g(16000) = 1600$ ist, der maximale Gewinn demnach bei 16000Stk liegt und 1600,-€ beträgt.

(cc) BY-SA 2010 Dr. Martin Lehmann-Greif ; Stefan Thul ; Thomas Unkelbach