Name: **Datum:**

Kurvendiskussion trigonometrischer Funktionen - Anwendungsaufgabe Tagesdauer - Lösung

a) Individuelle Lösung.

b) Individuelle Lösung.

c) Hier ist der Funktionswert an der Stelle 1 gesucht, also

$$d(1) = 4\frac{1}{4}\cdot\cos(\frac{2\pi}{365}\cdot(1-172)) + 12\frac{1}{4} = 8{,}08\ldots.$$

Der 1.Januar ist demnach ungefähr $8{,}08\text{h} \approx 8\text{h}5\text{min}$ lang.

d) Hier sind die Stellen zum Funktionswert 15 gesucht, also

$$15 = 4\frac{1}{4}\cdot\cos(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)) + 12\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{11}{17} = \cos(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172))$$

$$\Leftrightarrow 0{,}867\ldots = \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172) \vee -0{,}867\ldots = \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172) \Leftrightarrow t \approx 222 \vee t \approx 122.$$

Demnach ist der Tag am 10.August und am 2.Mai 15h lang.

e) Hier sind die Stellen zum Funktionswert 12 gesucht, also

$$12 = 4\frac{1}{4}\cdot\cos(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)) + 12\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{17} = \cos(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172))$$

$$\Leftrightarrow 1{,}630\ldots = \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172) \vee -1{,}630\ldots = \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172) \Leftrightarrow t \approx 267 \vee t \approx 77.$$

Demnach ist der Tag am 24.September und am 18.März genau so lang wie die Nacht.

f) Hier ist der Wert der 1.Ableitung an der Stelle 243 gesucht, also

$$d'(t) = 4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}(-\sin(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172))) \text{ und } d'(243) = -0{,}069\ldots.$$

Demnach ist der 1.September ungefähr $0{,}069\text{h} \approx 4{,}14\text{min}$ kürzer als der 31.August.

g) Hier sind die Stellen zu den Werten $+\frac{2{,}76}{60} = 0{,}046$ bzw. $-\frac{2{,}76}{60} = -0{,}046$ der 1.Ableitung gesucht, also

$$d'(t) = 0{,}046 \Leftrightarrow 4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}(-\sin(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172))) = 0{,}046 \Leftrightarrow \sin(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)) = -0{,}629$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172) = -0{,}680 \vee \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172) = \pi + 0{,}680 = 3{,}822 \Leftrightarrow t = 132{,}5 \vee t = 394.$$

Die Tagesdauer steigt sowohl am Tag $29\,(=394-365)$, d.h. am 29.Januar als auch am 12.Mai um 2,76min.

$$d'(t) = -0{,}046 \Leftrightarrow 4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}(-\sin(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172))) = -0{,}046 \Leftrightarrow \sin(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)) = 0{,}629$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172) = 0{,}680 \vee \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172) = \pi - 0{,}680 = 2{,}462 \Leftrightarrow t = 211{,}5 \vee t = 315$$

Die Tagesdauer sinkt sowohl am 30.Juli als auch am 11.November um 2,76min.

h) Hier sind die Extrempunkte gesucht, also

$$d'(t)=0 \;\Leftrightarrow\; 4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}\left(-\sin\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)\right)\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \sin\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)=0 \vee \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)=\pi \;\Leftrightarrow\; t=172 \vee t=354{,}5.$$

Weiter gilt mit $d''(t)=4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}\cdot\frac{2\pi}{365}\left(-\cos\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)\right)\right)$

$d''(172)=4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}\cdot\frac{2\pi}{365}(-\cos(0))=-4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}\cdot\frac{2\pi}{365}<0$, also Hochpunkt bei $t=172$.

Wegen $d(172)=4\frac{1}{4}+12\frac{1}{4}=16{,}5$ ist der längste Tag also am 21. Juni mit ungefähr 16,5 Stunden.

$d''(354{,}5)=4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}\cdot\frac{2\pi}{365}(-\cos(\pi))=4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}\cdot\frac{2\pi}{365}>0$, also Tiefpunkt bei $t=354{,}5$.

Wegen $d(354{,}5)=-4\frac{1}{4}+12\frac{1}{4}=8$ ist der kürzeste Tag also 20.Dezember mit ungefähr 8 Stunden.

i) $p\%=\frac{d(354{,}5)}{d(172)}=\frac{16{,}5}{8}=2{,}0625=206{,}25\%$. Der längste Tag ist also um rund 106% länger als der kürzeste Tag.

j) Hier sind die Wendepunkte gesucht, also

$$d''(t)=0 \;\Leftrightarrow\; 4\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{365}\cdot\frac{2\pi}{365}\left(-\cos\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)\right)\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \cos\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)=\frac{\pi}{2} \vee \frac{2\pi}{365}\cdot(t-172)=-\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; t=263{,}25 \vee t=80{,}75.$$

Dass dort Wendepunkte vorliegen, zeigt entweder der Graph oder aber die Berechnungen zum Krümmungsverhalten in Aufgabenteil **g)**.

Wegen $d(263{,}25)=12\frac{1}{4}$ und $d'(263{,}25)=-0{,}0732$ beträgt die Tagesdauer am 21. September zu Herbstanfang also $12\frac{1}{4}h$ und nimmt an diesem Tag um rund 4,4 Minuten ab.

Wegen $d(80{,}75)=12\frac{1}{4}$ und $d'(80{,}75)=0{,}0732$ beträgt die Tagesdauer am 22.März zum Lenzbeginn also ebenfalls $12\frac{1}{4}h$ und nimmt an diesem Tag um rund 4,4 Minuten zu.