

Name:

Datum:

Kurvendiskussion trigonometrischer Funktionen - Anwendungsaufgabe Federpendel

Ein Körper der Masse M , der durch eine Feder mit der Federkonstante D an einer Wand befestigt ist, wird aus der Ruhelage auf eine Position $y_0 \neq 0$ ausgelenkt, dort festgehalten, d.h. $v(0)=0$ (Geschwindigkeit beim Start) und dann losgelassen.

Bekanntlich schwingt der Körper nach dem Loslassen zuerst stärker und dann aufgrund von Reibungskräften immer schwächer 'hin und her', bis er schließlich zur Ruhe kommt. Wir werden in diesem Zusammenhang aber von diesen Reibungskräften absehen und so tun, als ob der Körper immer weiter schwingt.

Nach dem 2. NEWTONschen Gesetz, der sogenannten Grundgleichung der Mechanik, wird die Bewegung des Körpers, d.h. der Ort y des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t , durch diejenige Funktion beschrieben, deren Funktionsterm $y(t)$ die sogenannte **Differenzialgleichung 2.Ordnung**

$$y''(t) = -\frac{D}{M} \cdot y(t) \quad (1) \quad \text{und die beiden Anfangsbedingungen } y(0) = y_0 \text{ und } y'(0) = 0$$

erfüllt. Dieser Term $y(t)$ wird in der Physik als die **Auslenkung** des Körpers bezeichnet. Die erste Ableitung $y'(t)$ ist die Geschwindigkeit des Körpers und die zweite Ableitung $y''(t)$ ist seine Beschleunigung.

Arbeitsaufträge:

a) Zeige, dass die Funktion mit dem Funktionsterm $y(t) = y_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{M}} \cdot t\right)$ die Differenzialgleichung (1) erfüllt, indem du den Term selbst und seine zweite Ableitung in die Differenzialgleichung (1) einsetzt und die Differenzialgleichung so in eine allgemeingültige Gleichung überführst.

b) Zeige, dass diese Funktion auch die beiden Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = 0$ erfüllt.

Wir beschränken uns im Folgenden auf den Definitionsbereich $D_y = [0; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{D}}]$, das ist die Zeitspanne, die der Körper für eine Schwingung benötigt.

c) Berechne für $M = 0,5\text{kg}$, $D = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ und $y_0 = 0,1\text{m}$ den Wert $2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{D}}$ und zeichne im Intervall

$D_y = [0; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{D}}]$ die Graphen zu den Funktionstermen $y(t)$, $y'(t)$ und $y''(t)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

d) Berechne, zu welchen Zeitpunkten die Auslenkung des schwingenden Körpers extremal ist und markiere diese Zeitpunkte und die zugehörigen Auslenkungen in dem entsprechenden Graphen. Berechne auch die Geschwindigkeiten des Körpers zu diesen Zeitpunkten.

e) Berechne, zu welchen Zeitpunkten die Geschwindigkeit des Körpers extremal ist und markiere diese Zeitpunkte und die zugehörigen Geschwindigkeiten in dem entsprechenden Graphen. Berechne auch die Auslenkungen des Körpers zu diesen Zeitpunkten.

f) Die größten Kräfte wirken dann auf den Körper, wenn der Körper am stärksten beschleunigt, d.h. wenn sich die Geschwindigkeit des Körpers am stärksten ändert. Berechne, zu welchen Zeitpunkten dies geschieht. Berechne auch die Auslenkungen und die Geschwindigkeiten des Körpers zu diesen Zeitpunkten und markiere diese in den entsprechenden Graphen.

