Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schriftliche Überprüfung Mathematik

Gymnasien, Klasse 10

Schuljahr 2009/2010

10. Mai 2010

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer – Zweittermin

Diese Unterlagen enthalten:

I Allgemeine Hinweise zur Arbeit

II Aufgaben

III Erwartungshorizonte, Punkteverteilung und Bewertung

I Allgemeines

1. Die zuständige Fachlehrkraft erhält die beiden Prüfungsteile 1 (mit Aufgabe I) und 2 (mit den Aufgaben II, III, IV und V) und wählt aus den Aufgaben II, III, IV und V genau **drei Aufgaben** aus.

2. Zu Beginn der schriftlichen Überprüfung werden beide Prüfungsteile (Aufgabe I und die von der Fachlehrkraft ausgewählten drei Aufgaben, jedoch ohne Taschenrechner und ohne Formelblatt) an die Schülerinnen und Schüler verteilt.
   Bei Prüfungsteil 1 erhalten nebeneinander sitzende Schüler unterschiedliche Gruppen A/B.
   Eine Einlesezeit von bis zu 20 Minuten wird gewährt.

3. Die Arbeitszeit beträgt **135 Minuten**.
   Für die Bearbeitung des ersten Teils (Aufgabe I) stehen bis zu 45 Minuten zur Verfügung.
   Nach Abgabe des ersten Teils erhält der Schüler/die Schülerin seinen/ihren Taschenrechner und das Formelblatt ausgehändigt.
   Für die Bearbeitung des zweiten Prüfungsteils steht der verbleibende Rest der Arbeitszeit zur Verfügung.

4. Die Aufsicht übernimmt eine Lehrkraft, die nicht in der Klasse unterrichtet.

5. Zugelassene Arbeitsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig), Formelblatt, Rechtschreiblexikon.

6. Vor Beginn der Arbeit werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, die Aufgabenblätter und gegebenenfalls zugehörige Anlagen mit ihrem vollen Namen (Vor- und Zuname) sowie der Angabe der Klasse zu versehen.

7. Die Aufgabe I wird auf dem Aufgabenblatt bearbeitet. Für die Bearbeitung der drei Aufgaben des Prüfungsteils 2 ist separates Papier zu verwenden.

8. Die Aufgabenstellung darf von der Aufsicht nicht erläutert werden, auch nicht einzelnen Schülern. Das Verständnis der Aufgabenstellung gehört mit zur verlangten Leistung.

9. Jede Fachlehrkraft einer 10. Klasse korrigiert einen Klassensatz, aber nicht den ihrer eigenen Klasse.

10. Die Arbeit wird nach dem in den Erwartungshorizonten vorgegebenen Rahmen korrigiert.

11. Die Zensurengebung erfolgt nach dem auf Seite 29 gegebenen Schema; auch Tendenzangaben (+/–) sind danach vorgesehen.
    Zur zentralen Auswertung sind nur ganze Noten (ohne die Tendenzangaben) zurückzumelden.

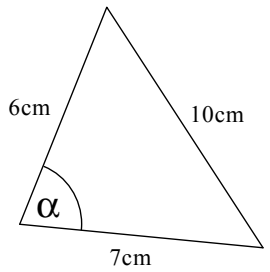
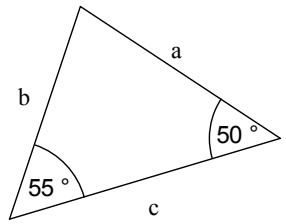
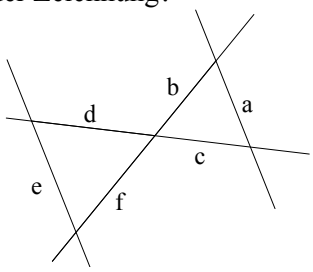
12. Treten beim Korrigieren größere Probleme bzgl. der Bepunktung auf, so sind Rückfragen möglich beim Fachreferenten Mathematik, Herrn Renz, Tel. 428 84 26 10, Fax 428 55 519, E-Mail: werner.renz@bsb.hamburg.de .

II Aufgaben Gruppe A

Aufgabe I (ohne Taschenrechner und Formelblatt)

1. Von den jeweils angebotenen Lösungen ist immer genau eine richtig. Überlege und schreibe den zugehörigen Buchstaben **A**, **B**, **C** oder **D** in die Spalte „**Lösung**“. Eine Begründung wird nicht verlangt. (14P)

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
a)	$0{,}00054 \cdot 10^7 =$	5 400	540	54	54 000	
b)	$\frac{15}{8} : \frac{5}{4} =$	$\frac{3}{2}$	$\frac{75}{32}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	
c)	$52\,ml =$	$0{,}052\ \text{dm}^3$	$52\ \text{dm}^3$	$5{,}2\ \text{cm}^3$	$0{,}52\,l$	
d)	$3 \cdot 2^3 =$	18	216	36	24	
e)	Ergänze so, dass man eine binomische Formel anwenden kann. $36a^2b^4 - ..... + 4a^2$	$24ab^2$	$12a^2b^2$	$24a^2b^2$	$12ab^2$	
f)	Der Preis eines Hemdes wurde von 50 € auf 55 € erhöht. Um wie viel Prozent wurde das Hemd teurer?	110 %	55 %	10 %	5 %	
g)	Um welchen Faktor ändert sich das Volumen eines Kegels, wenn man den Radius der Grundfläche verdoppelt und die Höhe beibehält?	2	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	
h)	Ein Kind bestellt ein Eis mit 1 Kugel Zitrone, 1 Kugel Himbeere, 1 Kugel Schokolade und 1 Kugel Vanille. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, diese vier Kugeln in die Waffel zu füllen?	12	24	6	36	
i)	Die Funktion $f(x) = 0{,}4 \cdot 2^x$ hat an der Stelle $x = -1$ den Funktionswert	$-0{,}8$	$-0{,}2$	1,25	0,2	

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
j)	$-3^4 =$	-12	12	-81	81	
k)	$x^2 - 2x + 3 = 6$ gilt für	$x = -2$	$x = 2$	$x = -1$	$x = 1$	
l)	Bei einem Dreieck sind alle Seitenlängen bekannt.  Welche Aussage gilt dann für den Winkel α?	$\alpha > 60°$	$\alpha = 60°$	$\alpha < 60°$	Mit diesen Informationen kann man keine Aussage zu α machen.	
m)	Bei einem Dreieck sind zwei Winkel bekannt. Welche Aussage stimmt? 	$b > c > a$	$c > b > a$	$c > a > b$	Mit diesen Informationen kann man keine Aussage zu a, b, c machen.	
n)	Welche Gleichung passt zu der Zeichnung? 	$\frac{b}{c} = \frac{d}{f}$	$\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$	$\frac{c}{d} = \frac{f}{b}$	$\frac{e}{f} = \frac{c}{a}$	

2. Gleichungen.

Bestimme die Lösungen folgender Gleichungen.

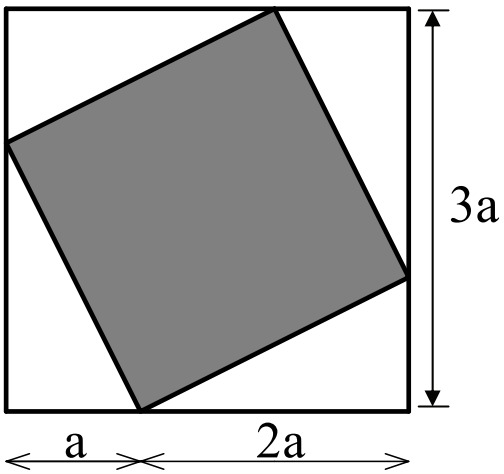
a) $(x+4)\cdot(x-4)=-6x$ (5P)

b) $(2x+4)(x^2-5)=0$ (3P)

c) $\sqrt{x-7}=3$ (4P)

3. Flächeninhalt (5P)

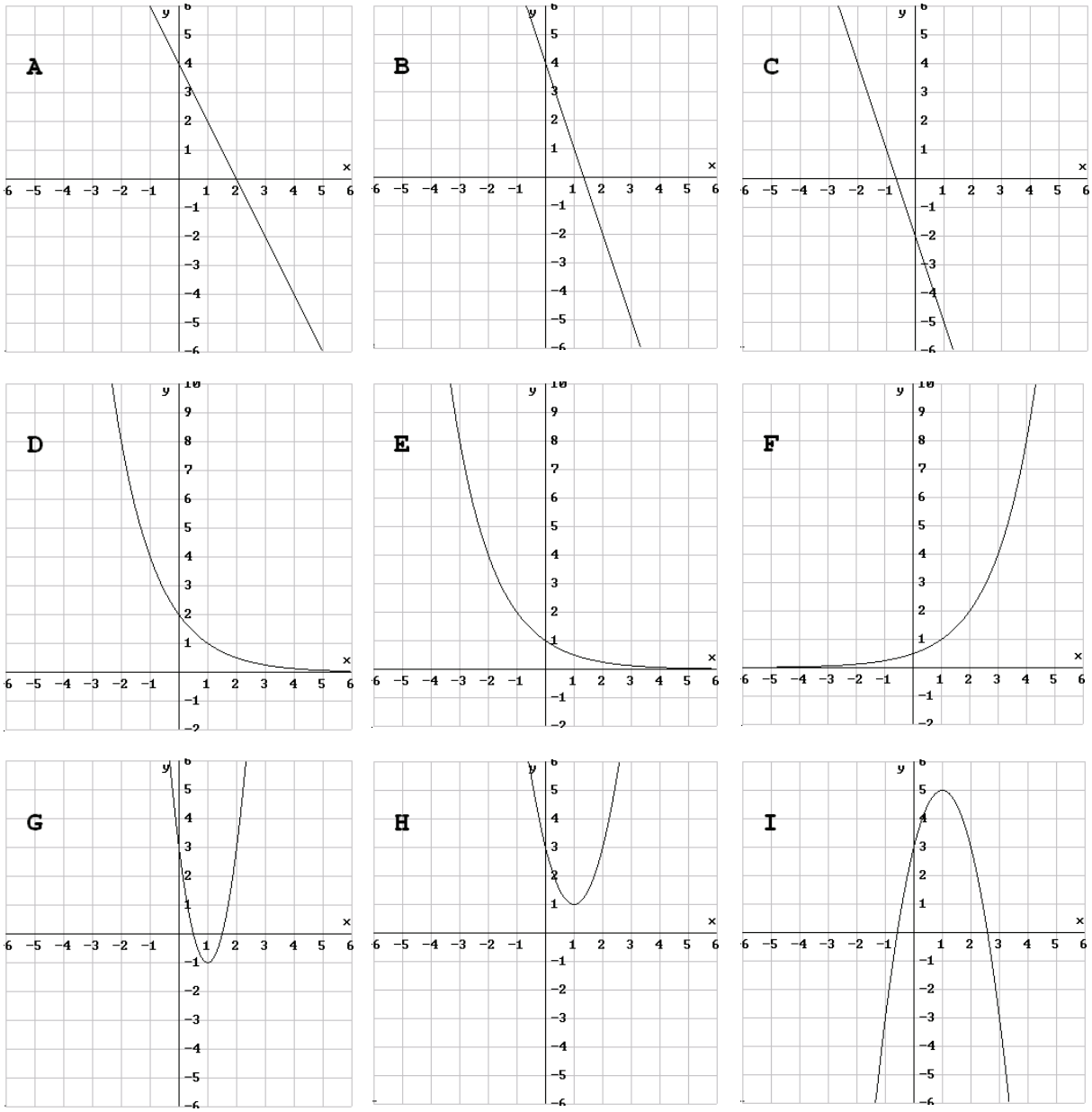
Bestimme einen Term für den Flächeninhalt des grau markierten Quadrats in Abhängigkeit von a und vereinfache ihn soweit wie möglich.



4. Graphen (3P)

Gib an, welcher der aufgeführten Graphen jeweils zu dem Funktionsterm gehört. Trage dazu den Buchstaben des Graphen unter den zugehörigen Term in die Liste ein.

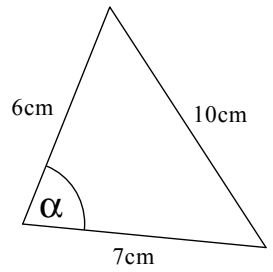
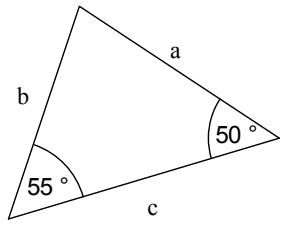
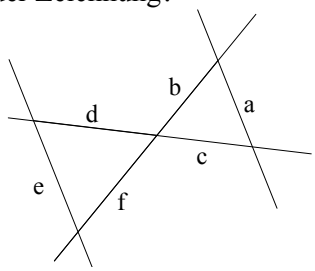
Funktionsterm	$-3\cdot(x+2)+4$	$2\cdot 0{,}5^x$	$2x^2-4x+3$
zugehöriger Graph			



Gruppe B

1. Von den jeweils angebotenen Lösungen ist immer genau eine richtig. Überlege und schreibe den zugehörigen Buchstaben **A**, **B**, **C** oder **D** in die Spalte „**Lösung**“. Eine Begründung wird nicht verlangt. (14P)

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
a)	$0{,}00054 \cdot 10^7 =$	54 000	54	540	5 400	
b)	$\frac{15}{8} : \frac{5}{4} =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{75}{32}$	$\frac{3}{2}$	
c)	$52\ ml =$	$0{,}52\ l$	$5{,}2\ \text{cm}^3$	$52\ \text{dm}^3$	$0{,}052\ \text{dm}^3$	
d)	$3 \cdot 2^3 =$	24	36	216	18	
e)	Ergänze so, dass man eine binomische Formel anwenden kann. $36a^2b^4 - ..... + 4a^2$	$12ab^2$	$24a^2b^2$	$12a^2b^2$	$24ab^2$	
f)	Der Preis eines Hemdes wurde von 50 € auf 55 € erhöht. Um wie viel Prozent wurde das Hemd teurer?	5 %	10 %	55 %	110 %	
g)	Um welchen Faktor ändert sich das Volumen eines Kegels, wenn man den Radius der Grundfläche verdoppelt und die Höhe beibehält?	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	4	2	
h)	Ein Kind bestellt ein Eis mit 1 Kugel Zitrone, 1 Kugel Himbeere, 1 Kugel Schokolade und 1 Kugel Vanille. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, diese vier Kugeln in die Waffel zu füllen?	36	6	24	12	
i)	Die Funktion $f(x) = 0{,}4 \cdot 2^x$ hat an der Stelle $x = -1$ den Funktionswert	0,2	1,25	$-0{,}2$	$-0{,}8$	

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
j)	$-3^4 =$	81	–81	12	–12	
k)	$x^2 - 2x + 3 = 6$ gilt für	$x = 1$	$x = -1$	$x = 2$	$x = -2$	
l)	Bei einem Dreieck sind alle Seitenlängen bekannt.  Welche Aussage gilt dann für den Winkel α?	Mit diesen Informationen kann man keine Aussage zu α machen.	$\alpha < 60°$	$\alpha = 60°$	$\alpha > 60°$	
m)	Bei einem Dreieck sind zwei Winkel bekannt. Welche Aussage stimmt? 	Mit diesen Informationen kann man keine Aussage zu *a*, *b*, *c* machen.	$c > a > b$	$c > b > a$	$b > c > a$	
n)	Welche Gleichung passt zu der Zeichnung? 	$\frac{e}{f} = \frac{c}{a}$	$\frac{c}{d} = \frac{f}{b}$	$\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$	$\frac{b}{c} = \frac{d}{f}$	

2. Gleichungen.

Bestimme die Lösungen folgender Gleichungen.

a) $(x-3)\cdot(x+3)=-8x$ (5P)

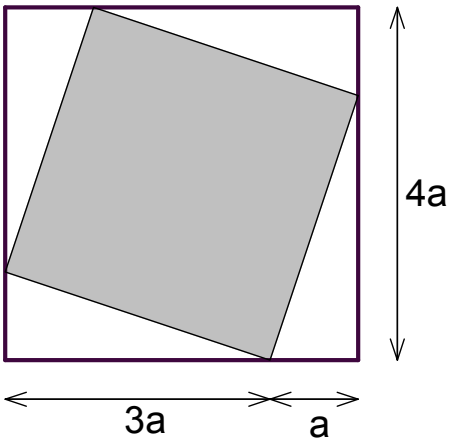
b) $(6+2x)\cdot(x^2-3)=0$ (3P)

c) $\sqrt{x-3}=4$ (4P)

Hinweis: Prüfe, ob die Lösung im Definitionsbereich liegt.

3. Flächeninhalt (5P)

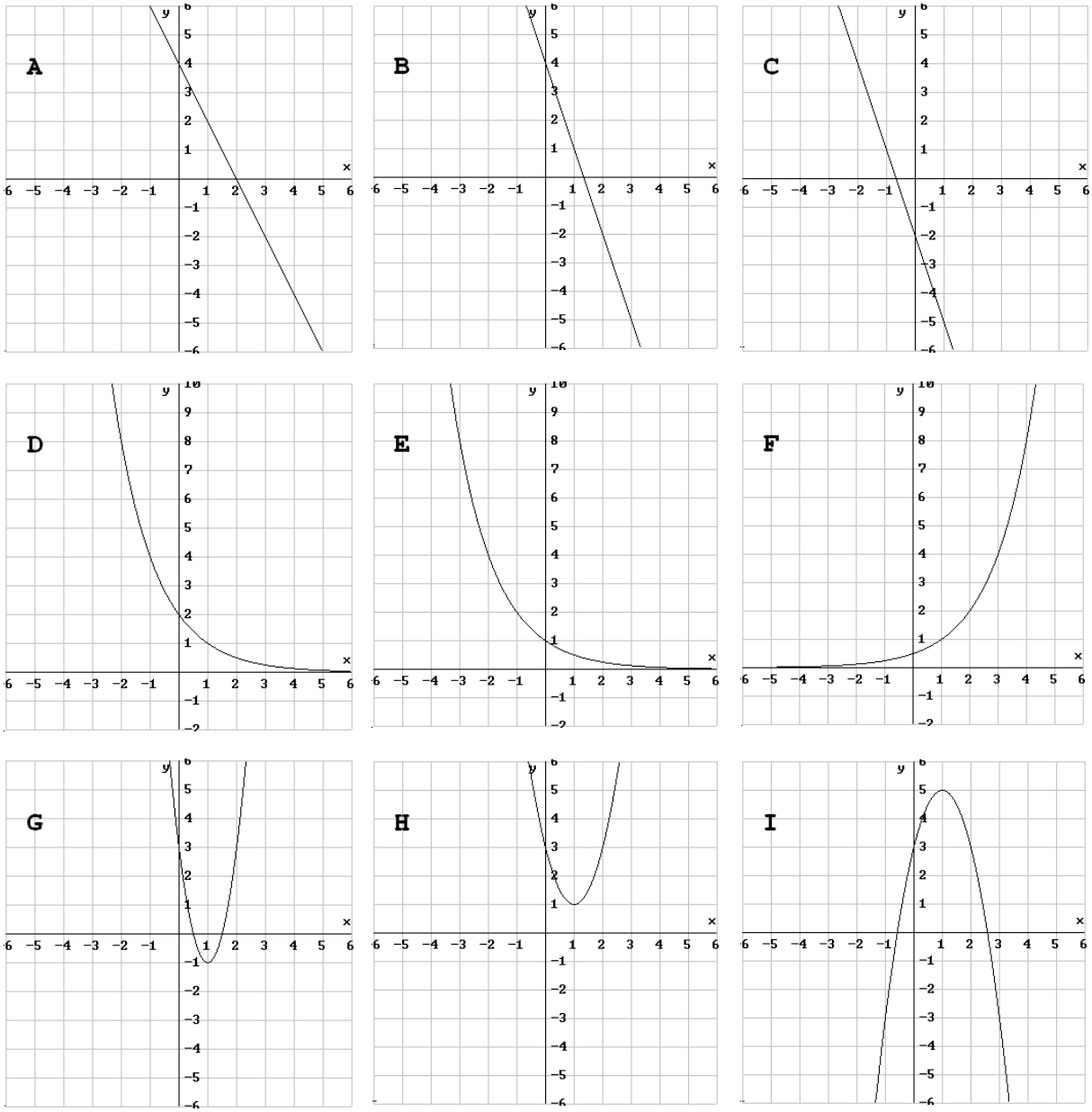
Bestimme einen Term für den Flächeninhalt des grau markierten Quadrats in Abhängigkeit von a und vereinfache ihn soweit wie möglich.



4. Graphen (3P)

Gib an, welcher der aufgeführten Graphen jeweils zu dem Funktionsterm gehört. Trage dazu den Buchstaben des Graphen unter den zugehörigen Term in die Liste ein.

Funktionsterm	$2x^2 - 4x + 3$	$2 \cdot 0{,}5^x$	$-3 \cdot (x+2) + 4$
zugehöriger Graph			



Idee der Zahl und des Messens

Aufgabe II: Trigonometrische Punkte (22P)

Die Landvermessung in Deutschland beruht auf so genannten *trigonometrischen Punkten*.

Wichtige Punkte, die hierfür in Deutschland verwendet wurden, liegen in Berlin. Ein Hauptpunkt ist der trigonometrische Punkt Rauenberg (siehe nebenstehende Abbildung), der bereits 1832 festgelegt wurde, ein anderer liegt auf dem Müggelberg.

Im sogenannten UTM-System verwendet man heute ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Ursprung auf dem Äquator liegt. Die y-Achse liegt in Nordrichtung, die x-Achse in Ostrichtung. Die Längeneinheit beträgt 1 m. Die Werte für die y-Koordinaten in Berlin liegen über 5 800 000, da Berlin etwa so weit vom Äquator entfernt ist.

Hinweis: Die Krümmung der Erde bleibt bei den nachfolgenden Überlegungen unberücksichtigt.

Der Rauenberg hat in diesem Koordinatensystem die UTM-Koordinaten R (388 928 | 5 812 571), der Müggelberg hat die UTM-Koordinaten M (407 052 | 5 808 200). Diese sind im Koordinatensystem in der Anlage eingetragen. Die Höhen der Berge müssen in der Aufgabe nicht berücksichtigt werden. Runde in allen Aufgaben die berechneten Streckenlängen auf Meter und die berechneten Winkel auf Hunderstel Grad.

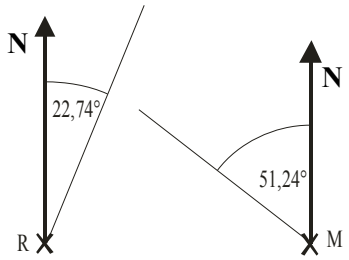
a) Berechne den Abstand vom Müggelberg zum Rauenberg.
Kontrollergebnis: 18 644 m. (6P)

Im Folgenden werden alle Winkel gegen die Nordrichtung gemessen.

b) Berechne den Winkel zur Nordrichtung, in dem man vom Müggelberg aus den Rauenberg sieht.
Kontrollergebnis: 76,44° nach West. (4P)

Vom Rauenberg aus sieht man im Nordosten einen Fernsehturm unter dem Winkel 22,74° .

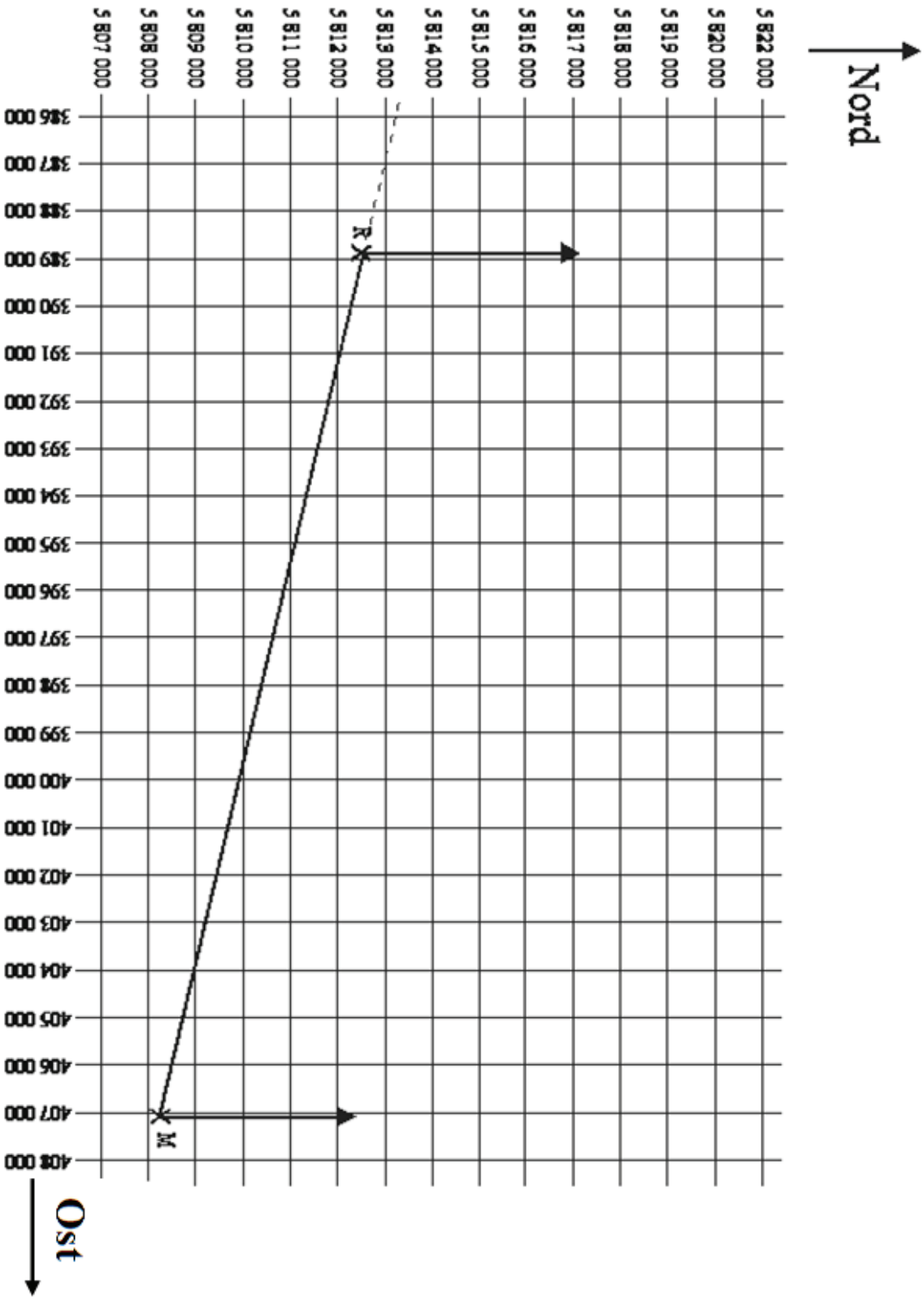
Vom Müggelberg aus sieht man den Fernsehturm im Nordwesten unter dem Winkel 51,24° .



c) Ergänze die ungefähre Lage des Fernsehturmes im Koordinatensystem in der Anlage und zeichne das Dreieck Fernsehturm-Müggelberg-Rauenberg.
Weise nach, dass die Winkel in diesem Dreieck 25,20° , 80,82° und 73,98° betragen, und trage sie in die Zeichnung ein. (7P)

d) Bestimme durch Rechnung in diesem Dreieck die Entfernung des Fernsehturms vom Rauenberg und die UTM-Koordinaten des Fernsehturms. (5P)

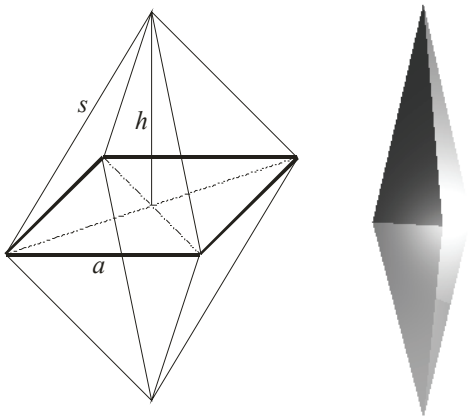
Anlage zur Aufgabe „Trigonometrische Punkte“



Idee von Raum und Form

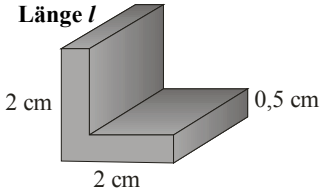
Aufgabe III: Oktaeder des Lichts (22P)

Die Künstlergruppe „Stahl und Farbe“ verwendet für spezielle Beleuchtungseffekte Oktaeder aus verschiedenen Materialien, die auf der Spitze stehen und sich drehen. Dabei werden die Oktaeder mit buntem Licht angestrahlt oder von innen beleuchtet. Das Licht wird reflektiert und gebrochen und erzeugt dabei besonders interessante Lichteffekte.



Die Künstler experimentieren mit verschiedenen Materialien wie Stahl und Glas. Für die Abschätzung des Gewichtes muss die verbaute Materialmenge bestimmt werden. Für alle geplanten Oktaeder soll gelten: $a = 20\,\text{cm}$ und $h = 32\,\text{cm}$.

Für den ersten Entwurf wird ein Rahmen des Oktaeders aus seinen zwölf Außenkanten (8 Kanten der Länge s und 4 Kanten der Länge *a*) hergestellt. In diesen Rahmen werden dann Glasplatten eingesetzt. Die Rahmen werden aus L-förmigen Stahlprofilen hergestellt, die 0,5 cm dick und 2 cm breit sind (siehe nebenstehende Abbildung). Der Stahl wiegt 7,8 g pro cm^3.



a) Bestätige, dass das Gewicht einer 1 m langen Stange des Stahlprofils 1 365 g beträgt. (4P)

b) Bestimme das Gewicht des für das Oktaeder benötigten Stahlprofils. (7P)
Hinweis: Die Überlappungen an den Ecken sollen ignoriert werden.

Die Glasplatten wiegen 1,5 g pro cm^2. Sie werden so für das Oktaeder zugeschnitten, dass die Kanten exakt in die Stahlprofile passen.

c) Bestimme das Gewicht (die Masse) der für das Oktaeder benötigten Glasplatten. (7P)

Die Künstler möchten eine große Version des ersten Oktaeders herstellen, bei der <u>alle</u> Kanten <u>doppelt so lang</u> sein sollen. Es sollen dasselbe Stahlprofil und dieselben Glasplatten verwendet werden.

d) Bestimme einen geeigneten Schätzwert für die Masse dieses neuen Oktaeders. (4P)

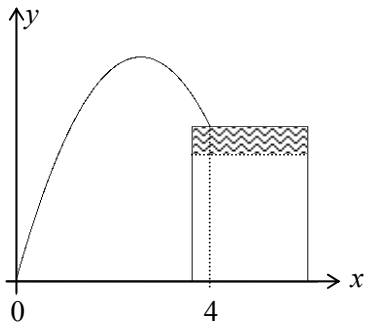
Idee des funktionalen Zusammenhangs

Aufgabe IV: Wasserspiele (22P)

Bei einem Springbrunnen wird Wasser in hohem Bogen in ein höher gelegenes Auffangbecken gespritzt. Die Form des Wasserstrahls lässt sich in einem Koordinatensystem (1 LE = 1m) beschreiben durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -0{,}7x^2 + 3{,}6x \quad \text{mit} \quad 0 \le x \le 4,$$

siehe nebenstehende Schnitt-Abbildung.

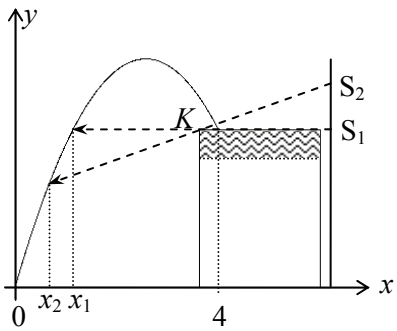


Die Dicke des Wasserstrahls ist zu vernachlässigen, Koordinaten sind auf zwei Nachkommastellen zu runden.

a) Erstelle die Wertetabelle in der Anlage.
Bestimme die Koordinaten des höchsten Punktes des Funktionsgraphen und zeichne die Funktion mithilfe der berechneten Punkte inklusive des höchsten Punkts in das Koordinatensystem (s. Anlage). (8P)

Das Auffangbecken hat in der Abbildung eine linke obere Ecke im Punkt $K(3{,}62 \mid 3{,}20)$ des Koordinatensystems.

Rechts vom Becken steht ein senkrechter Mast, an dem zwei verschieden farbige, punktförmige Lichtstrahler befestigt sind, die den Wasserbogen anleuchten. Ihre Positionen sind: $S_1(6{,}24 \mid 3{,}20)$; $S_2(6{,}24 \mid 3{,}50)$.



Die Strahler können nur einen Teil des Wasserbogens anleuchten, da das Auffangbecken einen Teil ihrer Strahlung abschattet.

b) Der Strahler S_1 leuchtet den Bogen für $x \ge x_1$ aus. Bestimme x_1 . (4P)

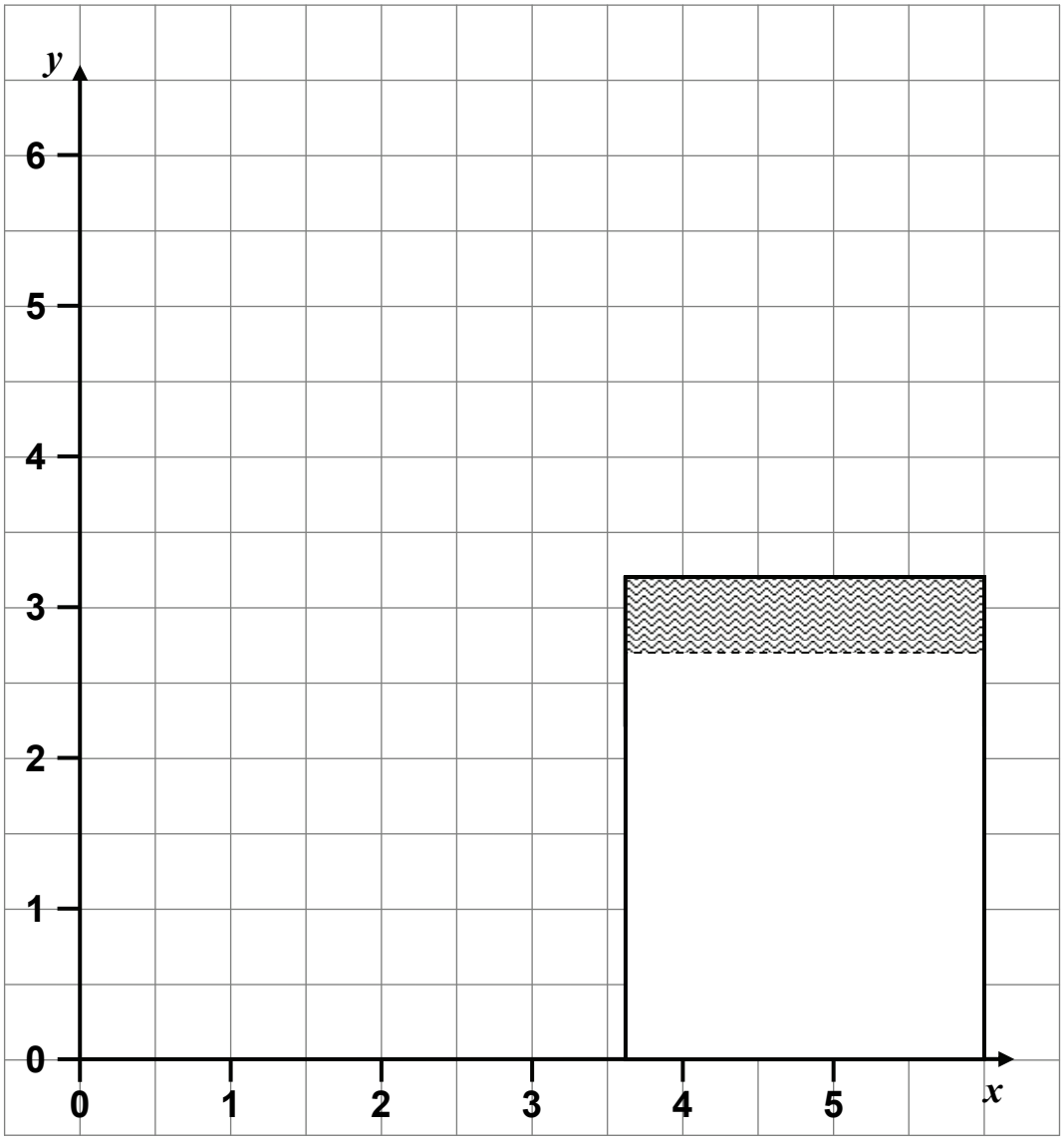
c) Der Strahler S_2 leuchtet den Bogen für $x \ge x_2$ aus. Zeige, dass $x_2 = 1{,}00$ ist. (5P)

Wenn der Druck, mit dem das Wasser hochgespritzt wird, sinkt, so wird der Wasserbogen schmaler und im Funktionsterm von $f(x)$ ändert sich der Faktor vor x^2. Die dadurch veränderte Funktion sei mit $g_a(x) = -ax^2 + 3{,}6x \quad (a > 0)$ bezeichnet.

d) Bestimme den Zahlenbereich $a_{\min} < a < a_{\max}$, in dem a liegen darf, wenn der Wasserstrahl trotz sinkendem Druck über die Kante K hinweg kommen soll. (5P)

Anlage zur Aufgabe „Wasserspiele“, Aufgabenteil a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$					



Idee der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe V: Sportfest (22P)

Die Schule Grünmoor feiert jedes Jahr im Juni ein Sportfest. Schülerinnen und Schüler mit besonders guten Leistungen erhalten eine Urkunde. Dieses Jahr haben 108 Jungen und 120 Mädchen eine Sporturkunde erhalten. Insgesamt hat Grünmoor 600 Schülerinnen und Schüler, davon sind 55 % Mädchen.

a) Ergänze die folgende Tabelle mit Hilfe der obigen Angaben. (5P)

	Sporturkunde		
	erhalten (Se)	nicht erhalten (Sn)	gesamt
Mädchen (M)	120		
Jungen (J)	108		
gesamt			600

Man kann aus den Daten der Vierfeldertafel in Aufgabe a) zwei Baumdiagramme anfertigen, die in der Anlage dargestellt sind.

b) Gib in den rechteckigen Feldern der Baumdiagramme in der Anlage die zugehörigen Anteile in Prozent an. (4P)

Die Schuldirektorin verteilt die Sporturkunden. Im Anschluss an die Preisverleihung recherchiert eine Reporterin für einen Artikel.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse (4P)

- E1: eine zufällig von der Direktorin ausgewählte Urkunde ist für ein Mädchen.
- E2: ein Junge, den die Reporterin zufällig auswählt, hat eine Sporturkunde erhalten.

In einem Artikel der Schülerzeitung steht:

„**Sportliche Mädchen**
Beim diesjährigen Sportfest waren wieder viele Schülerinnen und Schüler sehr erfolgreich. Es haben 2 von 5 Teilnehmern eine Sporturkunde erhalten. Insgesamt waren die Mädchen mit 120 Urkunden sportlicher als die Jungen, von denen 108 die Leistung für eine Urkunde erreichten.“

d) Entscheide, ob die im Artikel gemachten Aussagen, insbesondere der Vergleich der sportlichen Leistungen von Mädchen und Jungen, richtig sind. (4P)

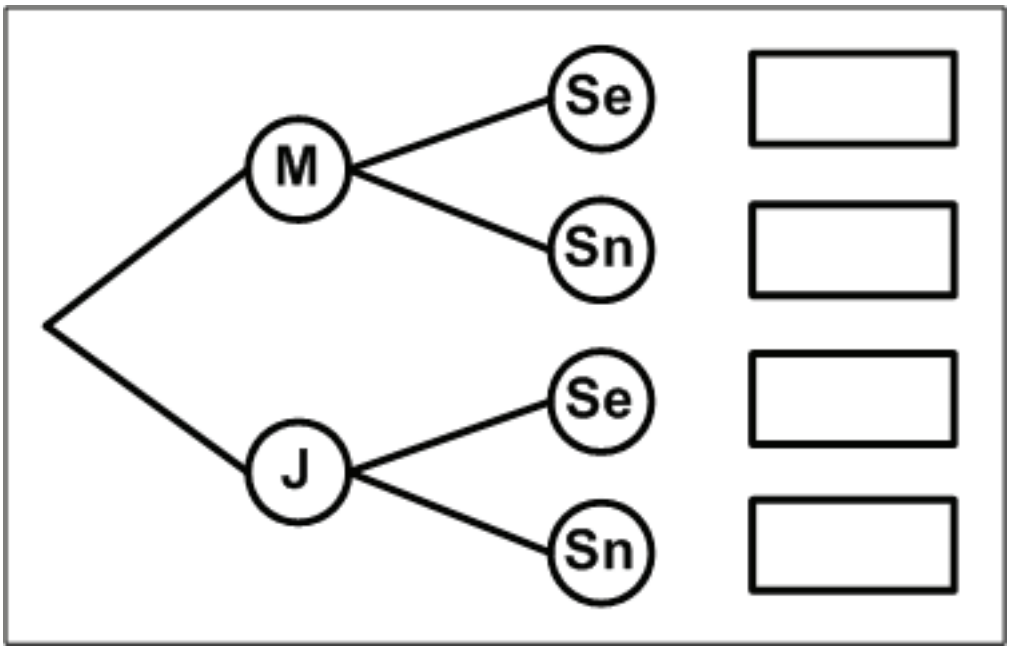
Erwin behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei zufällig ausgewählte Mädchen beide eine Sporturkunde haben, beträgt $\left(\frac{4}{11}\right)^2$.“

Elvira erwidert: „Deine Rechnung ist streng genommen falsch, da beim *zweiten Ziehen* nicht mehr alle Mädchen mitgezählt werden können.“

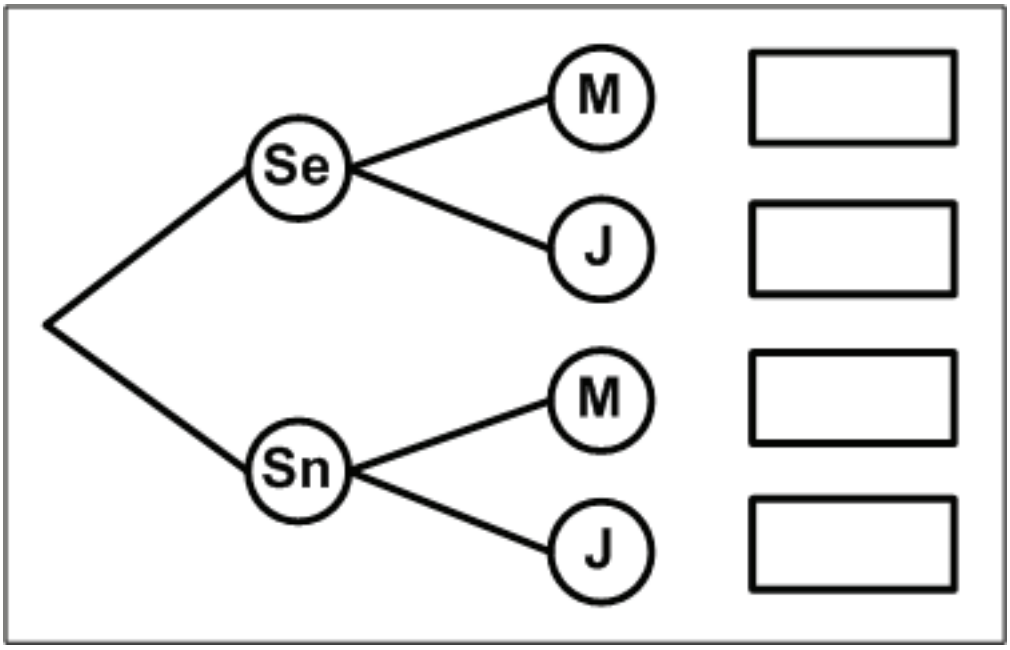
e) Bestimme den Unterschied der beiden Rechnungen und beurteile das Ergebnis. (5P)

Anlage zur Aufgabe „Sportfest“

Baumdiagramm 1:



Baumdiagramm 2:



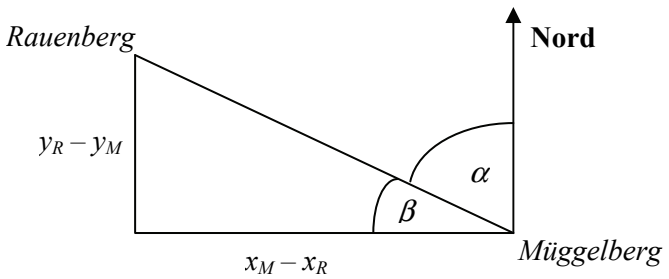
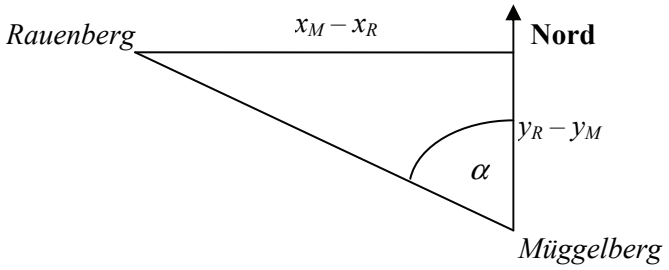
III Erwartungshorizonte, Punkteverteilung und Bewertung

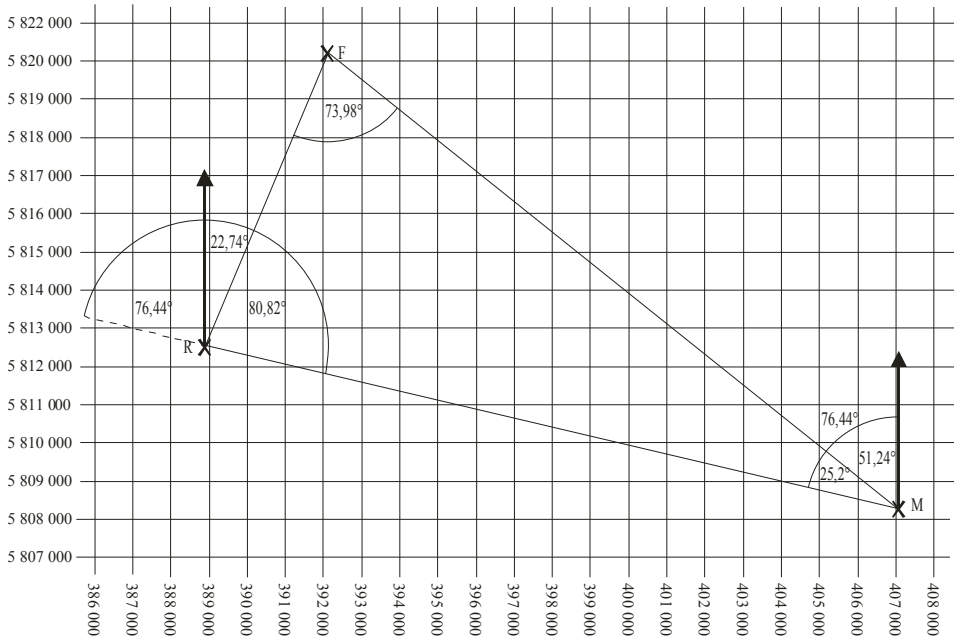
Aufgabe I

	Lösungsskizze				Zuordnung Bewertung		
			Gruppe A	Gruppe B	I	II	III
1.	a)	5400	**A**	**D**	1		
	b)	$\frac{3}{2}$	**A**	**D**	1		
	c)	$0{,}052\ \mathrm{dm}^3$	**A**	**D**		1	
	d)	24	**D**	**A**	1		
	e)	$24a^2b^2$	**C**	**B**		1	
	f)	10 %	**C**	**B**	1		
	g)	Das Volumen vervierfacht sich.	**B**	**C**	1		
	h)	24	**B**	**C**			1
	i)	$0{,}2$	**D**	**A**	1		
	j)	-81	**C**	**B**	1		
	k)	$x = -1$	**C**	**B**		1	
	l)	$\alpha > 60°$	**A**	**D**	1		
	m)	$c > a > b$	**C**	**B**	1		
	n)	$\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$	**B**	**C**		1	

	Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
	Gruppe A	**Gruppe B**	I	II	III
2. a)	$(x+4)\cdot(x-4)=-6x$ $x^2+6x-16=0$ $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9+16}$ $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{25}$ $x_1=-3+5=2$ $x_2=-3-5=-8$ **oder** $x^2+6x-16=0$ $(x-2)\cdot(x+8)=0$ $x_1=2$ $x_2=-8$	$(x-3)\cdot(x+3)=-8x$ $x^2+8x-9=0$ $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{16+9}$ $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{25}$ $x_1=-4+5=1$ $x_2=-4-5=-9$ $x^2+8x-9=0$ $(x-1)\cdot(x+9)=0$ $x_1=1$ $x_2=-9$	5		
b)	$(2x+4)\cdot(x^2-5)=0$ $2x+4=0$ oder $x^2-5=0$ $x_1=-2$ oder $x_{2,3}=\pm\sqrt{5}$	$(6+2x)\cdot(x^2-3)=0$ $6+2x=0$ oder $x^2-3=0$ $x_1=-3$ oder $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$	3		
c)	$\sqrt{x-7}=3$ $x-7=9$ $x=16$	$\sqrt{x-3}=4$ $x-3=16$ $x=19$	2	2	
3.	Der Pythagoras an einem der Dreiecke ergibt für den Flächeninhalt A des großen Quadrates: $A=a^2+4a^2=5a^2$	$A=a^2+9a^2=10a^2$		2	3
4	**Gruppe A:** C, D, H	**Gruppe B:** H, D, C			3
		Insgesamt 34 BWE	19	8	7

Erwartungshorizont zu Aufgabe II „Trigonometrische Punkte“

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Zur Berechnung des Abstandes kann der Satz des Pythagoras mit Hilfe der gegebenen Koordinaten angewendet werden: $d = \sqrt{(407\,052 - 388\,928)^2 + (5\,812\,571 - 5\,808\,200)^2}$ $d = 18\,643{,}632...$ Der Abstand beträgt ca. 18 644 m.	2	4	
b)	<u>Variante 1:</u>  $\tan\beta = \frac{y_R - y_M}{x_M - x_R} = \frac{5\,812\,571 - 5\,808\,200}{407\,052 - 388\,928} = 0{,}24117...$ $\beta \approx 13{,}56°$ $\alpha = 90° - \beta \approx 76{,}44°$. Vom Müggelberg sieht man den Rauenberg unter einem Winkel von etwa 76,44° gegen die Nordrichtung. <u>Variante 2:</u>  $\tan\alpha = \frac{x_M - x_R}{y_R - y_M} = \frac{407\,052 - 388\,928}{5\,812\,571 - 5\,808\,200} = 4{,}1464...$ $\alpha \approx 76{,}44°$.		4	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	 Am Punkt M muss die Differenz der beiden Peilungen zur Nordrichtung in M gebildet werden und es ergibt sich $76{,}44° - 51{,}24° = 25{,}20°$. Die Strecke $\overline{MR}$ ist über R hinaus zu verlängern, die Gerade MR bildet mit der Nordrichtung einen Winkel von 76,44° (*Stufenwinkel*). Der gesuchte Winkel ergänzt die Summe aus 76,44° und 22,74° zu 180°. Es gilt also: $180° - 76{,}44° - 22{,}74° = 80{,}82°$. Über den Winkelsummensatz im Dreieck ergibt sich der 3. Winkel: $180° - 80{,}82° - 25{,}20° = 73{,}98°$.	3	2	2
d)	Die Entfernung wird mit dem Sinussatz bestimmt. $\lvert FR\rvert = \frac{18\,644 \cdot \sin 25{,}2°}{\sin 73{,}98°} \approx 8\,259 \text{ m}$. Berechnung der x-Koordinate des Fernsehturms: $\sin 22{,}74° = \frac{x_F - x_R}{\lvert FR\rvert}$ $x_F = \sin 22{,}74° \cdot \lvert FR\rvert + x_R$ $x_F = 392120{,}501...$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Berechnung der y-Koordinate des Fernsehturms: $\cos 22{,}74° = \frac{y_F - y_R}{\lvert FR \rvert}$ $y_F = \cos 22{,}74° \cdot \lvert FR \rvert + y_R$ $y_F = 5820187{,}98...$ Der Fernsehturm hat die Koordinaten F (392 120 | 5 820 188). *Alternative Rechnungen sind möglich.*		2	3
	Insgesamt 22 BWE	5	12	5

Erwartungshorizont zu Aufgabe III „Oktaeder des Lichts“

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Grundfläche des Profils: $G = 2 \cdot 0{,}5 + 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}75$. Volumen $V = 1{,}75 \cdot 100 = 175$. Das Volumen des Stahlprofils beträgt 175 cm^3 und damit sein Gewicht (seine Masse) in g: $m = 175 \cdot 7{,}8 = 1\,365$. Das Stahlprofil hat ein Gewicht (eine Masse) von 1 365 g bzw. 1,365 kg.	2	2	
b)	Benötigt werden 8 Stangen der Länge s und vier Stangen der Länge a. Die Diagonale des Quadrates hat die Länge in cm: $d = \sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2} \cdot 20 \approx 28{,}3$. Daraus folgt für die Kante s in cm: $s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2} = \sqrt{32^2 + \frac{1}{2} \cdot 20^2} \approx 35$. Gesamtlänge in cm: $l = 8s + 4a \approx 8 \cdot 35 + 4 \cdot 20 = 360$. Masse in g: $m = 3{,}60 \cdot 1\,365 = 4914$ (exakt: 4912,44).	2	5	
c)	Für die Höhe k in dem Dreieck gilt in cm: $k = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} \cdot a^2} = \sqrt{32^2 + \frac{1}{4} \cdot 20^2} \approx 33{,}5$. Damit gilt für die Gesamtfläche der 8 Glasplatten in cm^2: $A = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot k = 4 \cdot 20 \cdot 33{,}5 = 2680$ (exakt: 2682). Masse der 8 Glasplatten in g: $m = 2680 \cdot 1{,}5 = 4020$ (exakt: 4023,13).	2	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Die Fläche und damit die Masse der Glasplatten vervierfacht sich, beträgt also 16 080 g. Die Länge und damit die Masse der Stahlstangen verdoppelt sich und beträgt damit 9 828 g. Die Gesamtmasse des großen Oktaeders beträgt damit 25 908 g (exakt: 25917 g). Jede Argumentation, die sowohl den Gesichtspunkt der Kantenverdoppelung als auch den der Flächenvervierfachung aufnimmt soll als richtig gelten, auch wenn keine Berechnung der Masse durchgeführt, sondern nur ein sinnvoller Schätzwert angegeben wird.		1	3
	Insgesamt 22 BWE	6	13	3

Erwartungshorizont zu Aufgabe IV „Wasserspiele“

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)		5	3	

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	2,90	4,40	4,50	3,20

Bestimmung des höchsten Punktes:

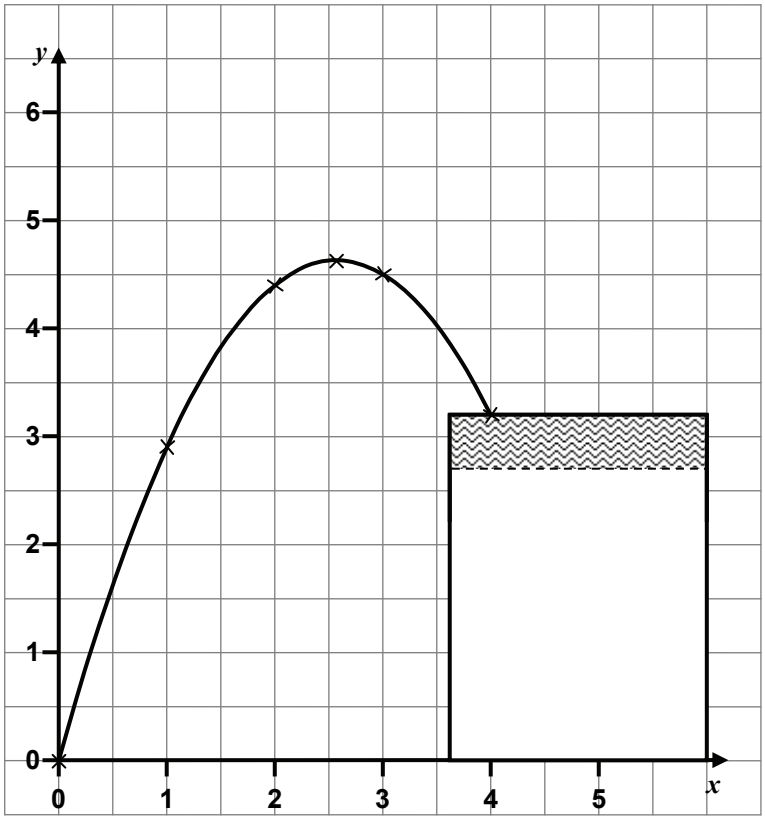
$f(x) = -0,7x^2 + 3,6x = x \cdot (-0,7x + 3,6)$

Die Funktion f hat die Nullstellen $x = 0$ und $x = \frac{36}{7} \approx 5,14$. Aus Symmetriegründen liegt der Scheitelpunkt bei $x = \frac{18}{7} \approx 2,57$.

$f(2,57) = -0,7 \cdot 2,57^2 + 3,6 \cdot 2,57 \approx 4,63$.

Der höchste Punkt hat die Koordinaten (2,57 | 4,63).

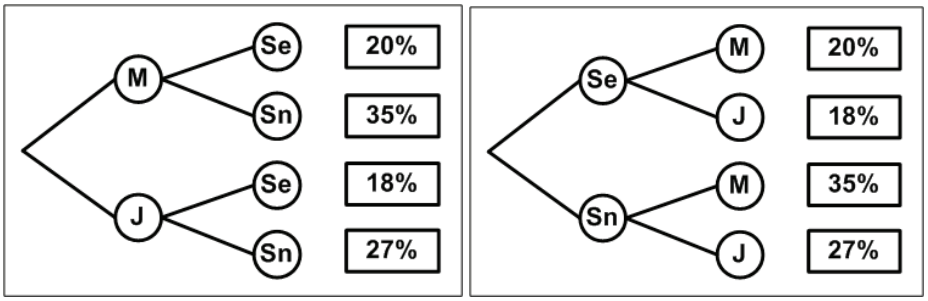
Andere Wege sind möglich.



	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	Es soll gelten $f(x_1) = 3,2$. $-0,7x^2 + 3,6x = 3,2$ $-0,7x^2 + 3,6x - 3,2 = 0$ $x^2 - \frac{36}{7}x + \frac{32}{7} = 0$ $x_{1,2} = \frac{18}{7} \pm \sqrt{\frac{324}{49} - \frac{224}{49}}$ $x_{1,2} = \frac{18}{7} \pm \frac{10}{7}$ $x_1 = 4$, nicht relevant $x_2 = \frac{8}{7} \approx 1,14$ *Auf den Hinweis „nicht relevant" kann verzichtet werden, wenn die für den Sachkontext relevante Lösung als einzige erkennbar ist.* *Andere Auflösungswege sind möglich, z.B.:* Aus Symmetriegründen liegt x_1 genauso weit vor dem x-Wert des Scheitelpunktes, wie der Endwert $x = 4$ des Bogens hinter ihm. $2,57 - x_1 = 4 - 2,57$ $x_1 = 5,14 - 4 = 1,14$.		4	
c)	Zu bestimmen ist die Gleichung der Geraden S_2K. Für die Steigung m dieser Geraden gilt: $m = \frac{3,50 - 3,20}{6,24 - 3,62} = \frac{0,3}{2,62} = 0,11450... \approx 0,1145$. Es gilt also $y = 0,1145x + b$. Einsetzen der Koordinaten des Punktes K ergibt: $3,20 = 0,1145 \cdot 3,62 + b$ und damit $b \approx 2,7855$. S_2K hat die Geradengleichung $y = 0,1145x + 2,7855$. Probe auf Schnitt mit der Parabel an der Stelle $x_2 = 1$: $0,1145 \cdot 1,00 + 2,7855 = 2,90 = f(x_2)$. *Anmerkung: Bei stärkerer Rundung gibt es u.U. eine Diskrepanz um eine Einheit in der zweiten Nachkommastelle; diese muss als Folge der Näherung hingenommen werden.* *Alternative Wege, z.B. Schnittberechnung mit der Parabel oder Nachweis, dass K, S_2 und $(x_2 \mid f(x_2))$ auf einer Geraden liegen, sind möglich.*		5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Sinkender Druck bedeutet, dass a größer wird. Entsprechend der Aufgabenstellung muss a also größer oder gleich 0,7 werden. Damit der Wasserstrahl oberhalb von K verbleibt, muss erfüllt sein: $g_a(3{,}62) > 3{,}20$ $-a \cdot 3{,}62^2 + 3{,}6 \cdot 3{,}62 > 3{,}20$ $13{,}1044a < 9{,}832$ $a < 0{,}75$ Daraus folgt für a: $0{,}7 \leq a < 0{,}75$.		1	4
	Insgesamt 22 BWE	5	13	4

Erwartungshorizont zu Aufgabe V „Sportfest“

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Sporturkunde</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Erhalten</td><td>Nicht erhalten</td><td>gesamt</td></tr>
<tr><td>Mädchen</td><td>120</td><td>210</td><td>330</td></tr>
<tr><td>Jungen</td><td>108</td><td>162</td><td>270</td></tr>
<tr><td>gesamt</td><td>228</td><td>372</td><td>600</td></tr>
</table>
</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td> 
</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>• $p(E_1) = \frac{120}{228} \approx 0{,}53$,
• $p(E_2) = \frac{108}{270} \approx 0{,}4$.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>• erste Aussage: 2 von 5 (= 0,40) stimmt (oder ausreichend genau), da insgesamt $\frac{228}{600} = 0{,}38 = 38\,\%$ eine Urkunde erhielten.
• zweite Aussage: von den Jungen erhalten $\frac{108}{270} = 40\,\%$, von den Mädchen nur $\frac{120}{330} \approx 36\,\%$ eine Urkunde. Daher sind die Jungen relativ etwas sportlicher.
(Alternative Antworten möglich)</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Erwin: $\frac{120}{330} \cdot \frac{120}{330} = \left(\frac{4}{11}\right)^2 = \frac{16}{121} \approx 0{,}13223$ Elvira: $\frac{120}{330} \cdot \frac{119}{329} \approx 0{,}13153$.
Der Unterschied zwischen den beiden Rechnungen ist gering.
Beide haben daher Recht, wenn man die Wahrscheinlichkeit mit 13 % angibt.
(oder Der Unterschied ist so klein, dass er vernachlässigt werden kann.)</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 22 BWE</td><td>5</td><td>12</td><td>5</td></tr>
</table>

Bewertung:

Bewertungseinheiten	Note
≥ 90	1
≥ 85	1–
≥ 80	2+
≥ 75	2
≥ 70	2–
≥ 65	3+
≥ 60	3
≥ 55	3–
≥ 50	4+
≥ 45	4
≥ 40	4–
≥ 33	5+
≥ 26	5
≥ 19	5–
< 19	6