Lösungen zur schriftlichen Prüfung 2006
- Mathematik -
Jahrgangsstufe 10

Pflichtaufgabe 1

1. Berechnen Sie.

   1.1 $\frac{13}{2} - \frac{5}{3} = \frac{39}{6} - \frac{10}{6} = \mathbf{\frac{29}{6}}$

   1.2 $2\frac{2}{5} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{3} = \mathbf{4}$

   1.3 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = \mathbf{14}$

   1.4 $-4^3 - (-4)^3 = -48 + 48 = \mathbf{0}$

   1.5 $\log_3 81 = \mathbf{4}$

2. Terme

   2.1 $\sqrt{49 - x^2}$ ist für $x \in \mathbb{R}$ mit $|\mathbf{x}| > \mathbf{7}$ nicht definiert.

   2.2 $x^3 + 2x^2 + x = x \cdot (x^2 + 2x + 1) = \mathbf{x \cdot (x + 1)^2}$

   2.3 $\frac{4a^2b^2 - 16ab^3}{2ab - 8b^2} = \frac{4ab^2 \cdot (a - 4b)}{2b \cdot (a - 4b)} = \mathbf{2ab}$

3. Gleichungen: Bestimmen Sie die Lösungsmengen im Bereich der reellen Zahlen.

   3.1 $(x - 5) \cdot (x + 4) = 0 \Longrightarrow x - 5 = 0$ oder $x - 4 = 0 \qquad \mathbf{L = \{5; -4\}}$

   3.2 $\frac{24}{16} = \frac{21}{x} \Longrightarrow x = \frac{21 \cdot 2}{3} \qquad \mathbf{L = \{14\}}$

   3.3 $3^{x+5} = 27 \Longrightarrow x + 5 = \frac{\log 27}{\log 3} \qquad \mathbf{L = \{-2\}}$

4. Funktionen

   4.1

Nein	**Ja**	**Nein**

   4.2 Amplitudenhöhe ist 3; Periodenlänge ist $\pi \Longrightarrow \mathbf{a = 3} \qquad \mathbf{b = 2}$

   4.3 $f(x) = 2x + 3 \qquad g(x) = x + 4 \qquad x \in \mathbb{R}$

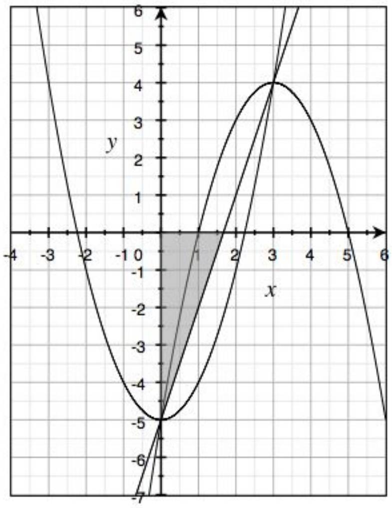
$$\begin{aligned} 2x + 3 &= x + 4 \\ x &= 1 \\ 2 + 3 &= 1 + 4 = 5 \\ &\Longrightarrow \mathbf{Q(1|5)} \end{aligned}$$

5. $\alpha = 180° - 122° - (180° - 144°) = 58° - 36° = \mathbf{22°}$

Pflichtaufgabe 2

$f(x) = -(x-3)^2 + 4 \qquad g(x) = x^2 - 5 \qquad x \in \mathbb{R}$

2.1 Skizze



2.2 Schnittpunkte: $S_1(0|-5) \qquad S_2(3|4)$

Geradengleichung: $\dfrac{-5-4}{0-3} = \dfrac{y-4}{x-3} \Longrightarrow \mathbf{h : y = 3x - 5}$

2.3 Flächeninhalt:

Die Gerade h schneidet die $x-$Achse im Punkt $S\left(\dfrac{5}{3}|0\right)$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $A_{\triangle} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{3} \cdot 5 = \mathbf{\dfrac{25}{6}FE}$

Pflichtaufgabe 3

1. Es gilt $200\ m = 2\pi r \Longrightarrow r \approx 31,8\ m$.

   Für Axel gilt dann: $200\ m + 2\pi(31,8 + 4)\ m \approx 224,9\ m$.

   Axel legt bei einer Runde eine Strecke von ca. **225 m** zurück.

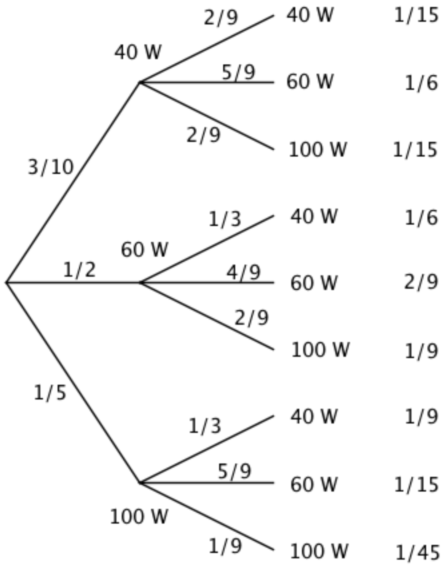
2. Für die Innenfläche des Schulsportplatzes gilt:

   $A = 100\ m \cdot 2 \cdot 31,8\ m + \pi \cdot (31,8\ m)^2 \approx 6360\ m^2 + 3177\ m^2 \approx 9537\ m^2$.

   Die Kosten belaufen sich auf ca. **37194,30 €**.

Pflichtaufgabe 4

1. Baumdiagramm



2. A: Beide Glühlampen gleich $P(A) = \frac{1}{15} + \frac{2}{9} + \frac{1}{45} = \mathbf{\frac{14}{45}}$

   B: Mindestens einmal 100 W $P(B) = \frac{1}{15} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{17}{45}}$

Wahlaufgabe 1

$\overline{AB} = 18\ m; \overline{BC} = 14\ m; E$ Mittelpunkt von $\overline{AD}$

1.1 Länge des Fußwegs:

Für den Winkel ε bei E gilt: $\varepsilon = 180° - 120° - 18° = 42°$

Nach dem Sinussatz gilt: $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{\overline{BE}}{\sin 120°} \Longrightarrow \overline{BE} = \dfrac{18\ m}{\sin 42°} \cdot \sin 120° \approx \mathbf{23,30\ m}$. Der Fußweg hat eine Länge von ca. 23,3 m.

1.2 Länge des Zaunes:

$\dfrac{\overline{AE}}{\sin 18°} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin 42°} \Longrightarrow \overline{AE} = \dfrac{18\ m}{\sin 42°} \cdot \sin 18° \approx 8,31\ m \Longrightarrow \overline{AD} \approx 16,62\ m$

Nach dem Kosinussatz gilt:

$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AB} \cdot \cos 120° \approx 900 \Longrightarrow \overline{BD} \approx 30\ m$

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin 120} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin\delta_1} \Longrightarrow \delta_1 = 31,3°$

$\overline{CD}^2 = 14^2 + 30^2 - 2 \cdot 14 \cdot 30 \cdot \cos 51,3° \Longrightarrow \overline{CD} = 23,9\ m$

$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CD} = (18 + 16,62 + 23,9)\ m \approx \mathbf{58,52\ m}$

Die Länge des Zaunes beträgt ca 58,5 m.

1.3 Grundstücksfläche:

$\sin 60° = \dfrac{h_1}{\overline{AD}} \Longrightarrow h_1 \approx 14,4\ m$

$A_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_1 \approx 129,6\ m^2$

$\sin 51,3° = \dfrac{h_2}{\overline{BC}} \Longrightarrow h_2 \approx 10,9\ m$

$A_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot h_2 \approx 163,9\ m^2$

$A_G = A_1 + A_2 \approx \mathbf{293,5m^2}$

Die Gesamtfläche des Grundstückes sind 293,5 m^2.

1.4 Gartenhaus

Volumen des Quaders: $V_Q = 3\ m \cdot 2,2\ m \cdot 2,1\ m = 13,86\ m^3$

Volumen des Prisma: $V_P = \dfrac{1}{2} \cdot 2,2\ m \cdot 1,1\ m \cdot 3\ m = 3,63\ m^3$

Gesamtvolumen:

$V_G = V_Q + V_P = \mathbf{17,49m^3}$

Das Gartenhaus braucht eine Genehmigung.

Wahlaufgabe 2

Kegel mit Radius $r = 6\ mm$ und Höhe $h = 8\ mm$

2.1 Volumen: $V_K = (\frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8) mm^3 = 96\pi\ mm^3 \approx \mathbf{301,6\ mm^3}$

2.2 Für die Mantellinie s_1 gilt: $s_1 = \sqrt{6^2 + 8^2}\ mm = 10\ mm$
Nach dem 2. Strahlensatz gilt: $\frac{r}{r_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{2}{1}$ mit r_2 Radius des kleineren Kegels K.

Es gilt: $r_2 = \frac{1}{2}r = 3\ mm$ und $s_2 = \frac{1}{2}s_1 = 5\ mm$.

- Mantelfläche des „großen" Kegels:
  $2\pi \cdot 6 = 2\pi \cdot 10\frac{\alpha}{360°} \Longrightarrow \alpha = 216°\ A_M = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{216°}{360°} = 60\pi \approx 188,5\ mm^2$
- Mantelfläche des „kleinen" Kegels:
  $A_m = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{216°}{360°} = 15\pi\ mm^2 \approx 47,12\ mm^2$
- Kreisring der Grundfläche:
  $A_R = \pi \cdot (6^2 - 3^2) = \sqrt{27}\pi\ mm^2 \approx 16,32\ mm^2$

Gesamtoberfläche des Schmuckstücks: $A_S = (188,5{+}47,12{+}16,32)\ mm^2 = \mathbf{251,94\ mm^2}$

2.3 Oberflächeninhalt des Schmuckstücks
Nach dem 2. Strahlensatz gilt:
$\frac{8}{4} = \frac{r}{r_3} \Longrightarrow r_3 = \frac{1}{2}r = r_2$
$\frac{8}{4} = \frac{s_1}{s_3} \Longrightarrow s_3 = \frac{1}{2}s_1 = s_2$

- Mantelfläche:
  $A_M = \pi \cdot s_2 \cdot (r + r_2) = (\pi \cdot 5 \cdot 9)\ mm^2 = 45\pi\ mm^2 \approx 141,37\ mm^2$
- Kreisflächen: $A_K = 36\pi\ mm^2 \approx 113,1\ mm^2 \qquad A_k = 9\pi\ mm^2 \approx 28,27$

Gesamtoberflächeninhalt: $A_S = A_M + A_K + A_k \approx \mathbf{282,74\ mm^2}$

2.4 Die Kegel der Aufgabenteile 2.2 und 2.3 sind **identisch**.
Sie haben beide dieselben Maße für Radius, Höhe und Mantellinie.