FREISTAAT THÜRINGEN

BESONDERE LEISTUNGSFESTSTELLUNG

2003

MATHEMATIK

Arbeitszeit: 150 Minuten

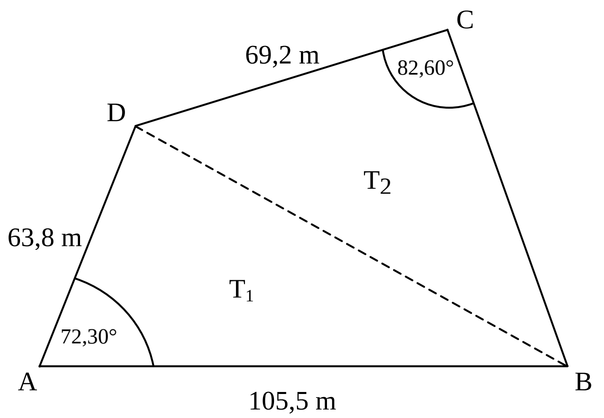
Hilfsmittel:
1. Formeln und Tabellen für die Sekundarstufen I und II. Berlin: Paetec, Ges. für Bildung und Technik
2. Formeln und Tabellen für die Sekundarstufe II: Mathematik, Informatik/ITG. Berlin: Paetec, Ges. für Bildung und Technik
3. Das große Tafelwerk, Volk und Wissen Verlag GmbH, Berlin
4. Im Ausnahmefall entscheidet der Schulleiter in Abstimmung mit der Fachkonferenz über die Zulassung anderer Formelsammlungen.

Der Prüfungsteilnehmer löst die Pflichtaufgabe und wählt von den Wahlaufgaben A1 und A2 eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

ÖFFNUNG AM 04. JUNI 2003

Pflichtaufgabe

1 Die folgende Skizze zeigt ein Grundstück, das Alex und Benni gemeinsam erben.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Sie dürfen das Grundstück nur entlang der Strecke $\overline{BD}$ in die Teilstücke T_1 und T_2 teilen.
Berechnen Sie die Länge der neuen Grundstücksgrenze $\overline{BD}$!
(Kontrollergebnis: $\overline{BD} \approx 105{,}4\,\text{m}$)

2 BE

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BC}$!

4 BE

c) Das gesamte Grundstück hat eine Fläche von 6256 m^2. Da die beiden Teilstücke nicht ganz die gleiche Größe haben, soll ein Ausgleich zum ortsüblichen Grundstückspreis von 50,- Euro pro Quadratmeter erfolgen.
Der Eigentümer welches Grundstückes muss einen Ausgleich bezahlen und wie hoch ist dieser?

3 BE

d) Von D aus führt ein Fußweg senkrecht zur Grundstücksgrenze $\overline{AB}$.
Berechnen Sie dessen Länge!

2 BE

e) Jeder der beiden Erben Alex und Benni erhält außerdem 10000 Euro.
Alex legt seinen Teil für 6 Jahre zu einem Zinssatz von 4,5% fest an. Die Zinsen werden dem Konto jährlich gutgeschrieben und verbleiben auf dem Konto.
Wie hoch ist der Kontostand nach 6 Jahren?
Wie lange müsste das Geld angelegt werden, wenn es sich verdoppeln soll?

3 BE

2 Gegeben sei eine Funktion f durch $y = f(x) = \sqrt{x+2}$.
Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an!
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f und den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion $\bar{f}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Geben Sie die Gleichung der Funktion $\bar{f}$ an!

4 BE

3 Vereinfachen Sie folgende Terme:
$2^{2a} : 2^{-a}$
$\log_a \sqrt{a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$

2 BE

Wahlaufgabe A1

Gegeben seien die Funktionen g und h durch $y = g(x) = 2\sin x$ und $y = h(x) = -\frac{1}{2}\sin x$.

a) Übernehmen Sie die Wertetabelle und ergänzen Sie die fehlenden Funktionswerte!
Skizzieren Sie die beiden Graphen im Intervall $-\pi \le x \le 2\pi$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

x	**- π**	**-0,5 π**	**0**	**0,25 π**	**0,5 π**	**0,75 π**	**1,5 π**	**2 π**
g(x)								
h(x)								

4 BE

b) Lösen Sie die beiden Gleichungen im Intervall $-\pi \le x \le 2\pi$!
2 sinx = 1
2 sinx = -1

4 BE

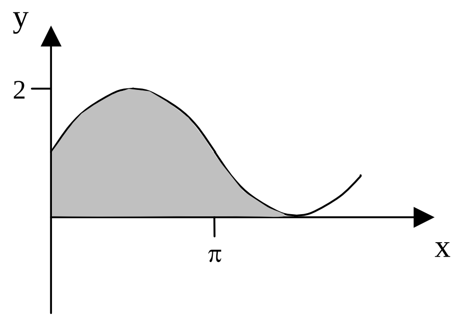
c) Die Punkte P(0; 0), $Q(\frac{\pi}{2};\ h(\frac{\pi}{2}))$, R(π; 0) und $S(\frac{\pi}{2};\ g(\frac{\pi}{2}))$ bilden ein Viereck. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt!

2 BE

d) Für jede positive reelle Zahl a sei eine Funktion f_a gegeben durch $y = f_a(x) = a\sin x$. Die Punkte $A(-\frac{\pi}{2}; f_a(-\frac{\pi}{2}))$, $B(\frac{3\pi}{2}; f_a(\frac{3\pi}{2}))$ und $C(\frac{\pi}{2}; f_a(\frac{\pi}{2}))$ bilden ein Dreieck ABC.
Berechnen Sie für a = 2 den Winkel $\alpha = \angle BAC$!
Bestimmen Sie den Wert von a, für den das Dreieck ABC rechtwinklig ist!

3 BE

e) Die Fläche, die der Graph von $y = s(x) = \sin x$ im Intervall $0 \le x \le \pi$ mit der x-Achse einschließt, hat den Inhalt 2. Der Graph von $y = t(x) = \sin x + 1$ geht aus dem Graphen von s durch eine Verschiebung um 1 entlang der y-Achse hervor.
Geben Sie zunächst die Nullstelle von t im Intervall $0 \le x \le 2\pi$ an!
Bestimmen Sie aus diesen Informationen den Inhalt der dargestellten Fläche!



2 BE

(Skizze nicht maßstäblich)

f) Alex und Benni spielen wöchentlich Tennis. Beim Tennis werden Sätze gespielt. Sie vereinbaren, wer zuerst zwei Sätze gewonnen hat, ist Sieger.
Alex gewinnt den ersten Satz mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%. Nach einem gewonnenen Satz wird Alex immer etwas leichtsinnig und er gewinnt den nächsten Satz nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%. Nach einem verlorenen Satz gewinnt er jedoch wieder mit 60%.
Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm!
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Alex das Tennisspiel?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel bereits nach 2 Sätzen?
Ein Satz dauert durchschnittlich 30 Minuten. Welche Spieldauer ist im Durchschnitt zu erwarten, wenn beide sehr häufig gegeneinander spielen würden?

5 BE

Wahlaufgabe A2

1 Aus einer Urne mit 5 roten und 10 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und jeweils ihre Farbe notiert. Die zugehörige Ergebnismenge ist Ω. Betrachtet werden die Ereignisse:
A: = “Die erste Kugel ist rot“ und
B: = “Genau eine Kugel ist rot“

a) Geben Sie die Ereignisse A und B als Teilmengen von Ω an und berechnen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten!

4 BE

b) Beschreiben Sie die Ereignisse $\overline{B}$ und $A \cap B$ mit Worten und geben Sie diese Ereignisse ebenfalls als Teilmengen von Ω an!

4 BE

c) In einer zweiten Urne befinden sich ebenfalls rote und schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen einer Kugel eine rote Kugel zu erhalten, beträgt p. Beim zweimaligen Ziehen mit Zurücklegen beträgt die Wahrscheinlichkeit zwei Kugeln mit gleicher Farbe zu erhalten $\frac{5}{8}$.
In welchem Verhältnis stehen die Anzahlen der roten und schwarzen Kugeln in der zweiten Urne?

3 BE

2 Für einen Einsatz von 1 Euro darf ein idealer Würfel einmal geworfen werden. Würfelt man eine gerade Zahl, erhält man 1 Euro ausgezahlt. Ist die gewürfelte Zahl durch 3 teilbar, werden 2 Euro ausgezahlt (Wird eine 6 gewürfelt, erhält man also 3 Euro ausgezahlt.).

a) Lohnt sich dieses Spiel für den Veranstalter? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

2 BE

b) Wie hoch wäre der zu erwartende Gewinn für den Spieler, wenn man dieses Spiel 30 mal spielt?

1 BE

3 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x \quad (x \in R)$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \leq x \leq 3$. Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an!

2 BE

b) Gegeben ist der Punkt $P(4;\ 2t + \frac{1}{2})$.

Ermitteln Sie t so, dass P auf dem Graphen der Funktion f liegt!
Berechnen Sie den Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung!

2 BE

c) Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Exponentialfunktion $g(x) = c \cdot a^x$ ($a > 0$), deren Graph durch die Punkte Q(0; 3) und R(3; 24) verläuft!

2 BE