FREISTAAT THÜRINGEN
Kultusministerium

BESONDERE LEISTUNGSFESTSTELLUNG

2004

MATHEMATIK

(HAUPTTERMIN)

Arbeitszeit:	150 Minuten
Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig) Tafelwerk

Lösen Sie die Pflichtaufgabe und wählen Sie von den Wahlaufgaben A1 und A2 eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

ÖFFNUNG AM 13. MAI 2004

Pflichtaufgabe

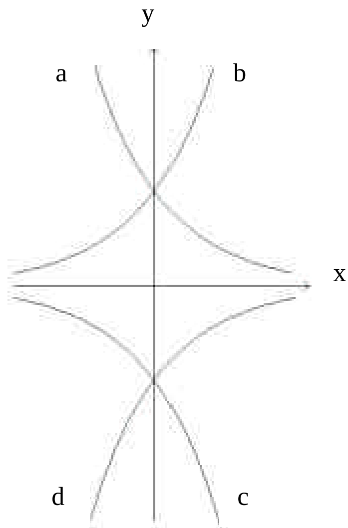
a) Im abgebildeten Koordinatensystem sind die Graphen der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 mit

$y = f_1(x) = 2^x$

$y = f_2(x) = 2^{-x}$

$y = f_3(x) = -2^x$

$y = f_4(x) = -2^{-x}$ dargestellt.



Ordnen Sie jedem der Graphen die entsprechende Funktionsgleichung zu!

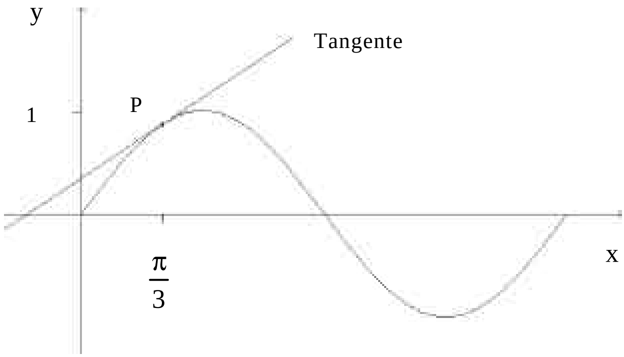
Paul Windig kommt völlig unvorbereitet und versucht, die Aufgabe durch pures Raten zu lösen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ordnet er alle vier Graphen richtig zu?
Begründen Sie, warum Paul niemals genau drei richtige Zuordnungen treffen kann!

4 BE

b) Für jede reelle Zahl a ($a \neq 0$) sei eine Funktion f_a durch
$y = f_a(x) = a \sin x$ gegeben.
Zeichen Sie den Graphen der Funktion f_3 im Intervall $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$!

Für a = 1 hat die Tangente im Punkt $P(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$

den Anstieg $\frac{1}{2}$ (siehe Skizze).



Welchen Anstieg hat die Tangente im Punkt $Q(\frac{2\pi}{3}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$?

Es gelte $f_a(1) = a \cdot \sin(1) = \frac{1}{2}$.

Welchen Wert hat dann $f_a(\pi + 1) = a \cdot \sin(\pi + 1)$?

3 BE

c) Die Funktion f mit $y = f(x) = ax^3$ verlaufe durch den Punkt $P(2; 10)$. Berechnen Sie a!

Die Funktion g mit $y = g(x) = 2x^n$ verlaufe durch den Punkt $Q(\sqrt{2}; 16)$. Berechnen Sie n!

3 BE

d) Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

$\log_3 81$

$\log_{0,1} 0{,}01$

$1 : \frac{1}{x^{-1}}$

$\sqrt{x^8}$

4 BE

e) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 4\ \text{cm}$, $\overline{BC} = 12\ \text{cm}$

und $\angle\ ACB = 38^\circ$.

Der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ werde mit M bezeichnet.

Berechnen Sie die Länge der Seitenhalbierenden $\overline{AM}$!
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABM!

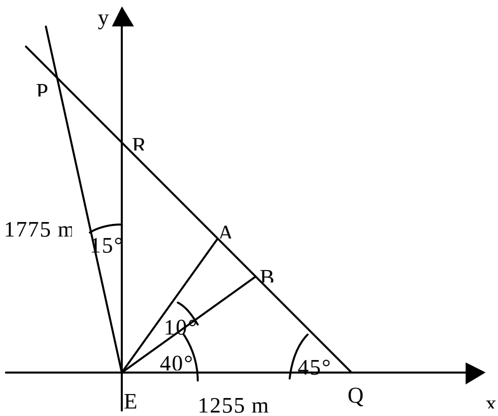
$\boxed{4\ \text{BE}}$

f) Von einem Dreieck seien alle drei Seiten gegeben. Man soll unter Verwendung von drei verschiedenen Sätzen alle Innenwinkel berechnen.
Welche Sätze sind das und in welcher Reihenfolge sind diese zu benutzen?

$\boxed{2\ \text{BE}}$

Wahlaufgabe A1

Um den Ortsteil Ebersdorf E der ostthüringischen Stadt Saalburg-Ebersdorf und einige weitere Gemeinden soll eine Umgehungsstraße gebaut werden. Die bisherige Straßenführung verläuft von Q über E nach P. Ein Vorschlag für die Umgehungsstraße ist die Strecke $\overline{PQ}$. Dabei sind eine Feuchtwiese und ein Teich zu überqueren, was durch die Brücke $\overline{AB}$ realisiert werden soll.
(Der Sachverhalt wird hier in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt.)



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Längen der Abschnitte $\overline{PQ}$ und $\overline{BQ}$ der Umgehungsstraße!

5 BE

b) Wie lang ist die Brücke $\overline{AB}$?

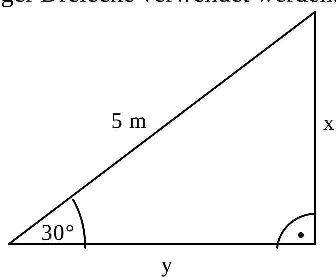
3 BE

c) Der Eigentümer Hagestolz bietet das Grundstück, das aus dem Dreieck ERP besteht, zum Kauf an. Berechnen Sie dessen

Flächeninhalt! 3 BE

d) Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{QR}$ ist der Punkt der Umgehungsstraße, der von E den kleinsten Abstand besitzt.
Eine Bürgerinitiative fordert für die Entfernung dieser Straße vom Ort E einen Mindestabstand von einem Kilometer.
Wird mit dem Projekt für die Umgehungsstraße diese Forderung erfüllt? 2 BE

e) Für den Bau der Brückenaufbauten sollen Bauelemente in Form rechtwinkliger Dreiecke verwendet werden.



Berechnen Sie die Längen der beiden anderen Dreiecksseiten! 2 BE

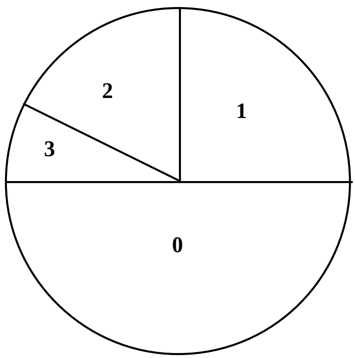
f) Bei einer Bank soll für den Bau der Umgehungsstraße ein Kredit über zwölf Millionen Euro aufgenommen werden.
Jedes Jahr soll sich der aktuelle Schuldenstand um den gleichen Prozentsatz p verringern.
Wie groß muss p mindestens sein, wenn sich die Schulden nach zehn Jahren mindestens halbiert haben sollen? 3 BE

g) Projekte, wie z. B. der Bau der Umgehungsstraße, werden üblicherweise ausgeschrieben.
Die Firma F ist bei solchen Ausschreibungen mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{3}$ erfolgreich.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält diese Firma bei drei Ausschreibungen genau einen Auftrag? 2 BE

Wahlaufgabe A2

Eine thüringische Kleinstadt möchte den 29. Februar 2004, den ersten Schalttag des dritten Jahrtausends – zumal er auf einen Sonntag fällt –, mit einem kleinen Volksfest begehen.

Ein Schausteller verwendet ein Glücksrad mit vier Sektoren, die mit den Ziffern Null, Eins, Zwei bzw. Drei beschriftet sind (siehe Skizze). Der Sektor mit der Eins umfasst einen rechten Winkel, der mit der Zwei einen Winkel von 60° und der mit der Drei einen Winkel von 30°.
Für einen Einsatz von einem Euro darf jeder Spieler das Glücksrad einmal drehen.
Dann bekommt er den Euro-Betrag ausgezahlt, der der Zahl auf dem Glücksrad entspricht.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit
- verliert ein Spieler seinen Einsatz?
- bekommt ein Spieler genau seinen Einsatz zurück?
- erhält ein Spieler höchstens zwei Euro ausgezahlt?

3 BE

b) Eduardo dreht das Glücksrad zweimal nacheinander.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A := „Er dreht beide Male eine Drei.“
B := „Er dreht erst keine Null und dann eine Null.“
C := „Er dreht zwei ungerade Zahlen.“
D := „Die Summe seiner gedrehten Zahlen beträgt drei.“

Weiterhin sei E das Ereignis: „Er dreht erst höchstens eine Zwei und dann eine ungerade Zahl.“
Welche der folgenden Formulierungen beschreibt das Gegenereignis $\overline{E}$?

1. „Er dreht erst eine ungerade Zahl und dann höchstens eine Zwei.“
2. „Er dreht beim ersten Mal eine Drei und beim zweiten Mal eine gerade Zahl.“
3. „Er dreht beim ersten Mal eine Drei oder beim zweiten Mal eine gerade Zahl.“

9 BE

c) Ein Glücksrad ist geometrisch gesehen ein Zylinder mit dem Durchmesser d.
Bei einem bestimmten Glücksrad beträgt die Dicke des Rades ein Fünfundzwanzigstel seines Durchmessers d. Zeigen Sie, dass für ein solches Glücksrad das Volumen mit der Formel

$V = \frac{\pi}{100} d^3$ berechnet werden kann!

2 BE

d) Gegeben sei die Funktion f mit der Gleichung

$$y = f(x) = \frac{\pi}{100} x^3 .$$

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-5 \leq x \leq 6$!
Geben Sie das Symmetrie- und Monotonieverhalten der Funktion f an!
Ermitteln Sie für $x \geq 0$ die Gleichung der zugehörigen Umkehrfunktion $\overline{f}$!
Skizzieren Sie den Graphen dieser Umkehrfunktion $\overline{f}$ in dasselbe Koordinatensystem!

6 BE