FREISTAAT THÜRINGEN
Kultusministerium

# BESONDERE LEISTUNGSFESTSTELLUNG 2006 MATHEMATIK

## (HAUPTTERMIN)

Arbeitszeit: 150 Minuten

Hilfsmittel: Tafelwerk
Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig)
(Schüler, die einen CAS-Taschencomputer im Unterricht benutzen, dürfen diesen verwenden.)

Lösen Sie die Pflichtaufgabe und wählen Sie von den Wahlaufgaben A1 und A2 eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

**ÖFFNUNG AM 11. MAI 2006**

## Pflichtaufgabe

Herr Justus prüft zu Beginn jeder Unterrichtsstunde einen Schüler.
Um gerecht zu sein, benutzt er einen Zufallsgenerator.
Gestern zeigte der Zufallsgenerator die Zahl an, die Philipps Nummer im Klassenbuch entspricht. Philipp erhielt nachfolgende Aufgaben.
Lösen Sie diese Aufgaben!

a) Gegeben sind die Funktionen f, g und h durch
$y = f(x) = x^3$, $y = g(x) = x^3 - 1$ und $y = h(x) = (x-1)^3$.
Wie gehen die Graphen der Funktionen g und h aus dem Graphen der Funktion f hervor?

2 BE

b) Geben Sie die Funktionsgleichungen zweier Funktionen $f_1$ und $f_2$ an, deren Graphen durch Verschiebung um zwei Längeneinheiten entlang der x-Achse auseinander hervorgehen!

1 BE

c) Für welchen Wert von a enthält der Graph der Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = 3^{ax} - 1$ den Punkt P(2; 2)?

2 BE

d) Gegeben ist die Funktion g mit der Gleichung
$y = g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ mit $x \geq 0$.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{g}$!

2 BE

Heute zeigt der Zufallsgenerator die Zahl an, die Emilias Nummer im Klassenbuch entspricht. Lösen Sie auch diese Aufgaben!

e) Von einem gleichschenkligen Dreieck ABC seien $\overline{AB} = 2\,\text{cm}$ und $\angle BAC = 45°$ gegeben. Welche Schenkellängen sind für dieses gleichschenklige Dreieck möglich?

2 BE

f) In einem Parallelogramm mit den Seitenlängen 5 cm und 8 cm beträgt die Größe eines Innenwinkels 60°.
Berechnen Sie den Flächeninhalt und die Längen der beiden Diagonalen dieses Parallelogramms!

5 BE

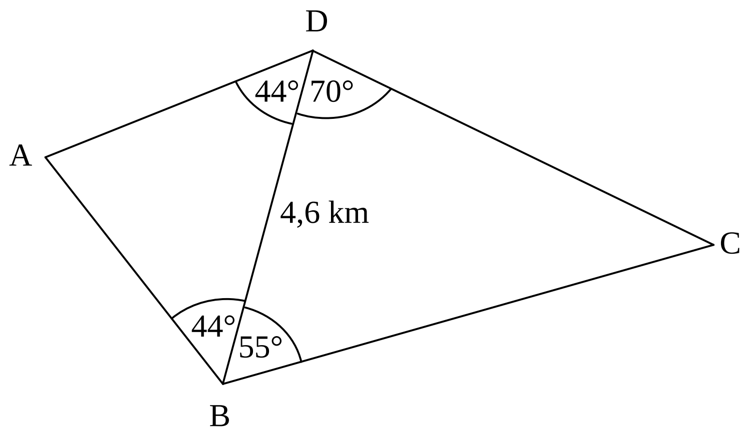
In seiner zehnten Klasse hat Herr Justus siebzehn Schülerinnen und dreizehn Schüler. In den Folgestunden wählt er wie immer mit dem Zufallsgenerator eine der Zahlen von Eins bis Dreißig mit derselben Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{30}$ aus. Durch die ausgewählte Zahl ist der zu prüfende Schüler festgelegt.

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A := „In der ersten Folgestunde ist Emilia wieder an der Tafel.“
B := „In der ersten Folgestunde wird ein Mädchen und in der zweiten Folgestunde ein Junge geprüft.“
C := „In den ersten beiden Folgestunden werden Personen unterschiedlichen Geschlechts geprüft.“
D := „In den ersten beiden Folgestunden werden Personen desselben Geschlechts, aber niemand zweimal geprüft.“
E := „In den ersten beiden Folgestunden werden unterschiedliche Personen und in der dritten eine dieser beiden Personen erneut geprüft.“

6 BE

## Wahlaufgabe A 1

Die Klasse 10/IV des Gymnasiums „Auf der Höhe“ plant eine Exkursion. Diese soll von Ort A aus über die Orte B, C und D führen und wieder im Ort A enden (s. Skizze).



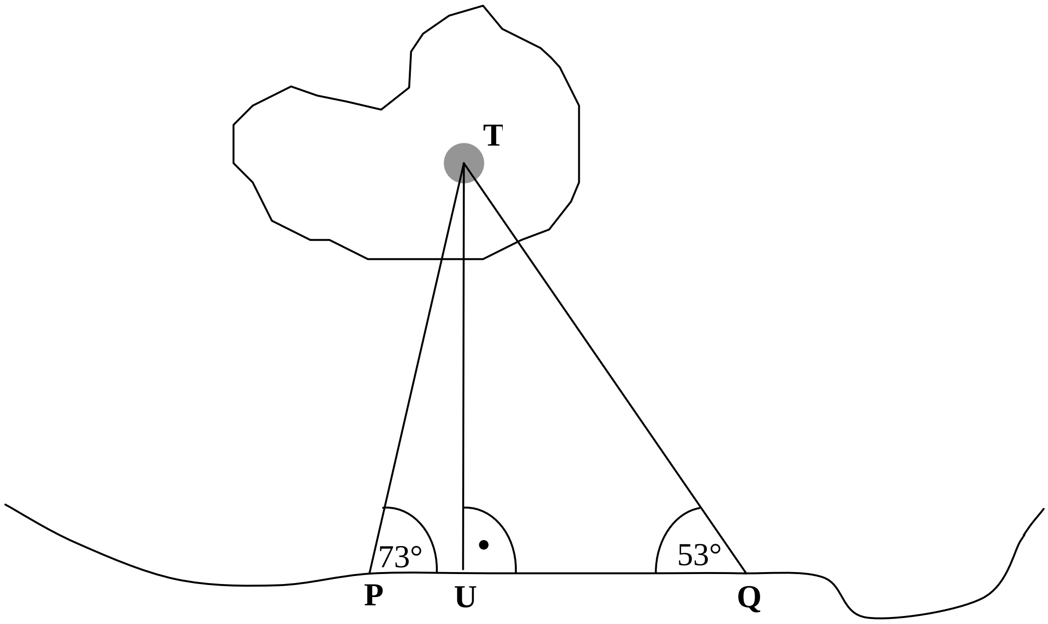

(Skizze nicht maßstäblich)

Aus einer Karte können folgende Angaben entnommen werden:
$\overline{BD} = 4{,}6\,\text{km}$, $\angle ADB = \angle DBA = 44°$, $\angle BDC = 70°$ und $\angle CBD = 55°$.

a) Das Vorbereitungsteam plant für diese Exkursion sechs Stunden ein. Die Wandergeschwindigkeit der Gruppe beträgt $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Für die Arbeit an Stationen und für Pausen sind insgesamt drei Stunden einzuplanen.
Entscheiden Sie aufgrund Ihrer Berechnungen, ob die Zeitvorgabe von sechs Stunden realistisch ist! **5 BE**

Während der Exkursion sollen unter anderem die Kenntnisse im Stoffgebiet „Berechnungen an Dreiecken“ gefestigt werden. Folgende Aufgaben sind zu lösen:

b) Während der Wanderung kommt man an einem See vorbei. In diesem See liegt eine Insel mit einem Turm T. Um die Entfernung des Turmes T von einem bestimmten Punkt U des Ufers zu bestimmen, werden am Ufer eine 50 m lange Strecke $\overline{PQ}$ abgesteckt und die beiden Winkel $\angle QPT = 73°$ und $\angle TQP = 53°$ gemessen (s. Skizze).

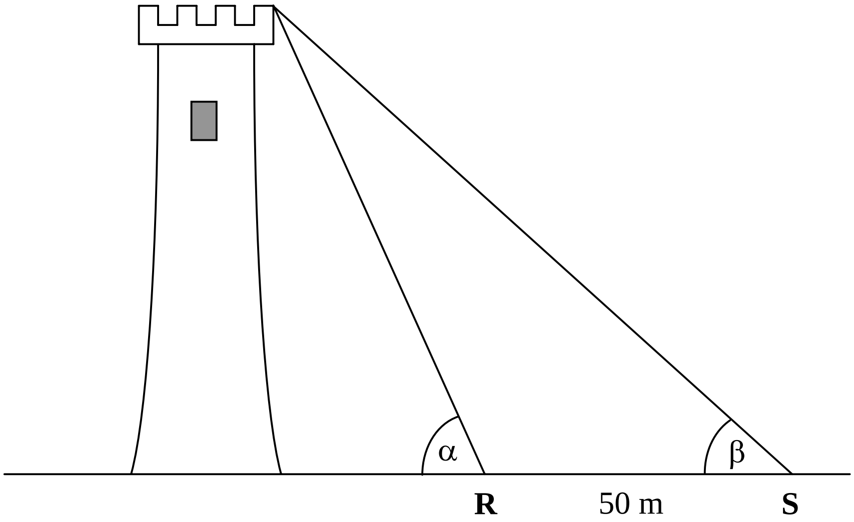



(Skizze nicht maßstäblich)

Berechnen Sie den Abstand $\overline{TU}$ des Turmes vom Ufer!

3 BE

c) Da die Insel an diesem Tag nicht Ziel der Exkursion ist, soll die Höhe des Turmes mit Mitteln der Trigonometrie bestimmt werden. Dazu werden am Ufer ebenfalls eine 50m lange Strecke $\overline{RS}$ abgesteckt und die Winkel $\alpha = 67°$ und $\beta = 37°$ bestimmt (s. Skizze).




(Skizze nicht maßstäblich)

Ermitteln Sie aus diesen Angaben die Höhe des Turmes! | 4 BE

d) An der nächsten Station trifft die Klasse auf den Förster. Der erklärt, dass der Holzbestand des Waldes ca. 50000 Festmeter (fm) beträgt. Unter normalen Bedingungen nimmt der Holzbestand des Waldes jährlich um 3,5 % zu.
Auf wie viele Festmeter wächst der Holzbestand in vier bzw. zehn Jahren an, wenn das oben genannte Wachstum anhält?
Wie viele Festmeter müsste man jährlich einschlagen, wenn der Holzbestand auf 50000 fm beschränkt bleiben soll?
Wie viele Hektar müssen in diesem Falle im ersten Jahr abgeholzt werden, wenn 300 fm/ha geschlagen werden? | 4 BE

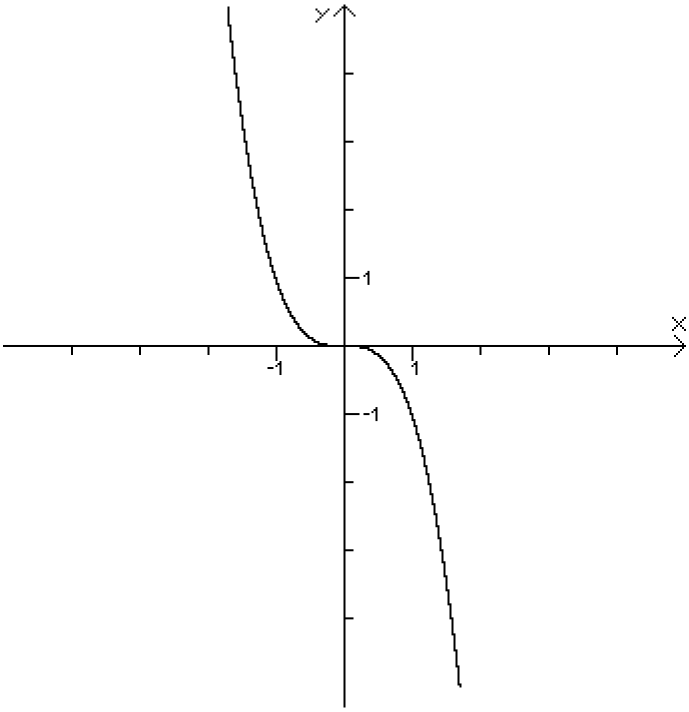
e) Die letzte Station ist ein Fischzuchtbecken. Dort wurde eine große Anzahl von Fischen eingesetzt; davon sind zwei Drittel Forellen. (Deshalb kann das Angeln als Ziehen mit Zurücklegen aufgefasst werden.) Der Klassenlehrer Herr Fischer darf während der Pause sein Anglerglück probieren und fängt tatsächlich drei Fische.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er drei Forellen gefangen?
Wie hoch hätte der Anteil der Forellen im Aufzuchtbecken mindestens sein müssen, damit Herr Fischer bei seinem Angelversuch mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % genau drei Forellen gefangen hätte? | 4 BE

## Wahlaufgabe A 2

a) Gegeben seien die Funktionen f, g und h mit $y = f(x) = x^3$,

$y = g(x) = -x^3$ und $y = h(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

In der Abbildung ist der Graph einer dieser Funktionen zu sehen.




Entscheiden Sie, welche Funktion graphisch dargestellt ist!
Zeichnen Sie die Graphen der beiden anderen Funktionen in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Graphen der Funktionen f und h genau zwei Punkte gemeinsam haben! Welche Beziehung besteht zwischen den Funktionen f und h mit $x \geq 0$? **6 BE**

b) Nun seien die Funktionen u und v mit den Gleichungen $y = u(x) = 2 \cdot \sin x$ und $y = v(x) = -\cos x$ gegeben.
Zeichnen Sie die Graphen dieser beiden Funktionen im Intervall $-\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.
Stellen Sie in einer Tabelle die Eigenschaften Wertebereich, kleinste Periode und Nullstellen der beiden Funktionen im vorgegebenen Intervall zusammen!
Der Graph einer Funktion $u_a$ mit $y = u_a(x) = a \cdot \sin x$ verläuft durch den Punkt $P\left(\frac{\pi}{4}; -\sqrt{2}\right)$.
Ermitteln Sie eine zugehörige Funktionsgleichung! **8 BE**

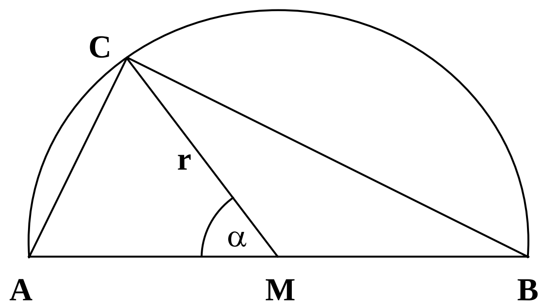
c) Wie groß ist jeweils x?

$$\log_2 \sqrt[3]{x} = 1$$

$$2^{x+3} = \frac{1}{4}$$

2 BE

d) Von einem Dreieck ABC liegt der Eckpunkt C auf einem Halbkreis über $\overline{AB}$ mit dem Radius r.




Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von r und $\alpha$ an!

2 BE

e) Immer beliebter werden sogenannte „Multiple-Choice-Tests“. Einer dieser Tests besteht aus zehn Aufgaben. Bei jeder Aufgabe gibt es vier Auswahlmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist.
Ein Testkandidat ist überhaupt nicht vorbereitet und kreuzt bei jeder Aufgabe genau eine Antwort zufällig an.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er alle Fragen richtig beantwortet?

2 BE