FREISTAAT THÜRINGEN
Kultusministerium

BESONDERE LEISTUNGSFESTSTELLUNG 2008 MATHEMATIK

(HAUPTTERMIN)

Arbeitszeit: 150 Minuten

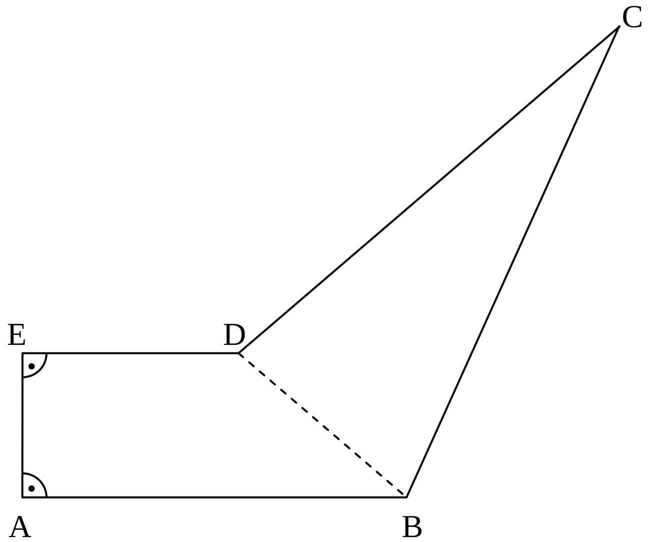
Hilfsmittel: Tafelwerk
Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig)
(Schüler, die einen CAS-Taschencomputer im Unterricht benutzen, dürfen diesen verwenden.)

Lösen Sie die Pflichtaufgabe und wählen Sie von den Wahlaufgaben A1 und A2 eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

ÖFFNUNG AM 06. JUNI 2008

Pflichtaufgabe

Angeregt von den schönen Anlagen zur BUGA 2007 in Gera und Ronneburg beschließt der Stadtrat von Neuhausen, ein Flächenstück, das zwischen zwei Stadtteilen liegt, als Park und Gartenanlage neu zu gestalten.



$\overline{AB} = 950\text{ m}$

$\overline{BC} = 1430\text{ m}$

$\overline{CD} = 1320\text{ m}$

$\overline{DE} = 620\text{ m}$

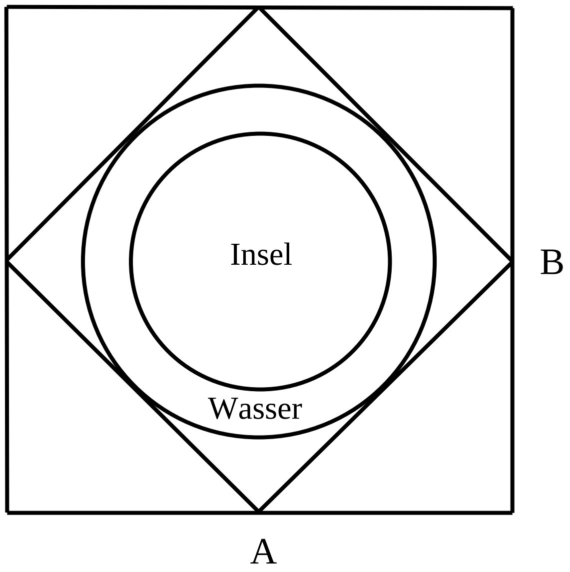
$\overline{EA} = 440\text{ m}$

(Skizze nicht maßstäblich)

a) Die beiden Stadtteile sollen durch einen geraden Weg $\overline{BD}$ verbunden werden. Berechnen Sie die Länge dieses Weges!
(Kontrollergebnis $\overline{BD} = 550\text{ m}$)
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks ABCDE und geben Sie den Flächeninhalt in Hektar an!

6 BE

Ein Element der Neugestaltung soll eine quadratische Anlage sein, in die ein zweites Quadrat, dessen Eckpunkte die Seitenmittelpunkte des ersten Quadrates sind, eingefügt ist. In diesem zweiten (inneren) Quadrat soll ein Wassergraben angelegt werden, dessen Wasseroberfläche den gleichen Flächeninhalt haben soll wie die Insel in der Mitte.



$\overline{AB} = 20\,\mathrm{m}$

(Skizze nicht maßstäblich)

b) Zeigen Sie, dass das äußere Quadrat den doppelten Flächeninhalt des inneren Quadrates besitzt! Berechnen Sie den Durchmesser der Insel!
Der Wassergraben soll eine Tiefe von 50 cm besitzen.
Berechnen Sie die Wassermenge in Litern!
(Kontrollergebnis: Wasseroberfläche $50\pi\,\mathrm{m}^2 \approx 157\,\mathrm{m}^2$)

6 BE

c) Zur Eröffnung am 1. Mai wurden im Wassergraben Seerosen gesetzt, die $2\,\mathrm{m}^2$ der Oberfläche bedecken. Die von den Seerosen bedeckte Fläche wächst täglich um 4 %. Nach wie viel Tagen ist der Graben vollständig bewachsen?

3 BE

Aufgabenteile d) und e) auf Seite 4

d) Von den Mittelpunkten der Seiten des inneren Quadrates sollen parabelförmige Bögen mit einer Höhe von 3 m zur Mitte der Insel gebaut werden.

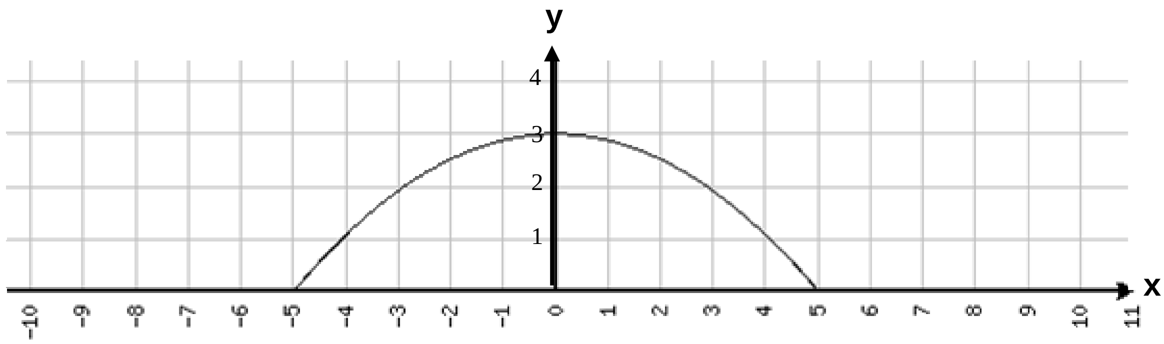


Abbildung 1

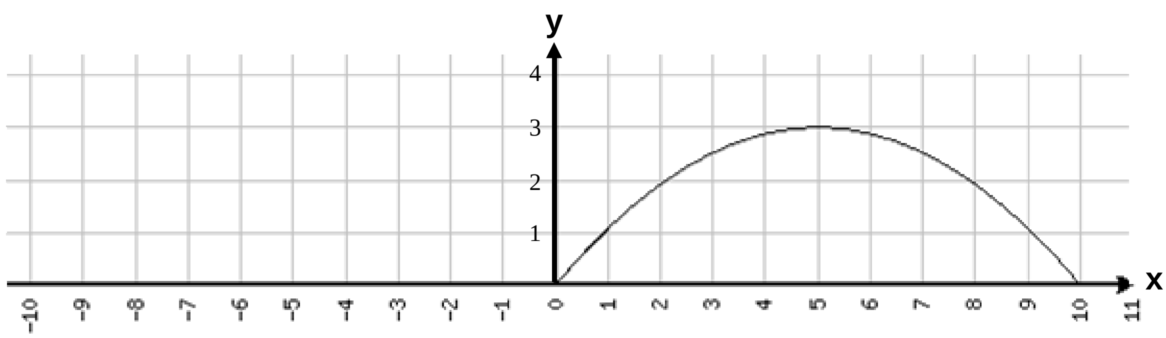


Abbildung 2

Geben Sie für eine der abgebildeten verschiedenen Lagen der Parabeln eine Funktionsgleichung an!

2 BE

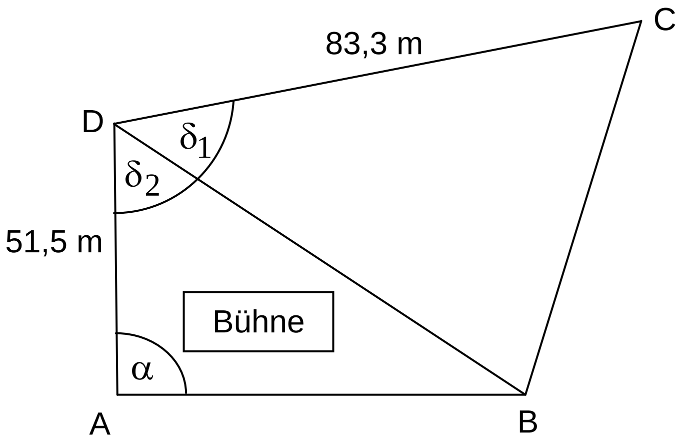
e) Für das Anlegen der Blumenbeete kaufte man eine sehr große Menge an Tulpenzwiebeln. Die Mischung besteht zu gleichen Teilen aus 3 verschiedenen Farben. Der Mischung werden zufällig 3 Zwiebeln entnommen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es Zwiebeln nur einer Farbe?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es Zwiebeln von 3 Farben?

3 BE

Wahlaufgabe A1

Zum Schuljahresende findet am Gymnasium ein Schulfest statt. Für die Feierlichkeiten soll der Schulhof genutzt werden, von dem folgende Angaben bekannt sind:

$\overline{AD} = 51{,}5\,\text{m}$; $\overline{CD} = 83{,}3\,\text{m}$; $\alpha = 90°$; $\delta_1 = 62{,}7°$; $\delta_2 = 41{,}6°$



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Um den gesamten Schulhof ABCD herum sollen Girlanden gezogen werden. Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ werden mit Lichterketten geschmückt. Berechnen Sie, wie viele Meter Girlande und wie viele Meter an Lichterketten dazu gekauft werden müssen! Das Durchhängen der Ketten wird nicht berücksichtigt.

5 BE

b) Auf dem Teil des Schulhofs, der durch das Dreieck ABD beschrieben wird, soll eine rechteckige Bühne mit der Länge $10\,\text{m}$ und der Breite $5\,\text{m}$ aufgebaut werden. Berechnen Sie, wie viel Prozent dieses Schulhofteils von der Bühne bedeckt wird!

2 BE

Aufgabenteile c), d) und e) auf Seite 6

Auf dem anderen Teil des Schulhofes sollen Stände aufgebaut werden, an denen die Arbeit einzelner Unterrichtsfächer gezeigt wird. Der Stand der Mathematik soll von Schülern der Klassen 9 und 10 gestaltet werden.

c) In der Vorbereitungsphase ergibt sich ein Gespräch zwischen der Mathematiklehrerin und einem Schüler. Die Lehrerin sagt: „Vor sieben Jahren betrug dein Alter genau ein Sechstel meines Alters. In fünf Jahren wird dein Alter genau ein Drittel meines Alters betragen."
Ermitteln Sie das Alter von Lehrerin und Schüler! **3 BE**

Die Schüler der Klasse 10a berichten über Winkelfunktionen.
Lösen Sie die folgende Aufgabe:

d) Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichungen
$y = f(x) = 3 \cdot \sin x$ und $y = g(x) = -\frac{3}{2} \cdot \sin x$
Skizzieren Sie die Graphen beider Funktionen in ein und dasselbe Koordinatensystem im Intervall $0 \le x \le 2\pi$!
Die Punkte
$A\left(\frac{\pi}{2};\, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2};\, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $C\left(\frac{3\pi}{2};\, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ und $D\left(\frac{3\pi}{2};\, g\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$
bilden ein Parallelogramm.
Berechnen Sie Flächeninhalt und Umfang des Parallelogramms! **6 BE**

Die Schüler der Klasse 10b stellen einige Probleme aus dem Gebiet Stochastik vor.

e) Lösen Sie die folgenden Aufgaben:
1. In einem leeren Zugabteil mit 6 Plätzen nehmen 4 Personen Platz. Auf wie viele Arten ist das möglich?
2. Eine Urne enthält 15 rote und 5 weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen zuerst eine rote und dann eine weiße Kugel zu ziehen?
3. Für eine Sorte Blumenzwiebeln gibt es eine Keimgarantie von 90 %. Ein Hobbygärtner kauft eine Packung mit 20 Zwiebeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit keimen genau 19 Zwiebeln?

4 BE

Wahlaufgabe A2

Anne und Markus helfen beim Aufräumen des Mathematikvorbereitungsraumes ihrer Schule.

a) Sie halten 3 Folien, die jeweils den Graphen einer Funktion zeigen, in der Hand. Durch Übereinanderlegen der Folien stellen sie fest, dass es zwei Punkte gibt, die zu den Graphen aller drei Funktionen gehören.
Die Funktionsgleichungen lauten:
$y = f(x) = x + 1, \qquad y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1; \qquad y = h(x) = (x+1)^3$
Skizzieren Sie die Graphen dieser drei Funktionen in ein und dasselbe Koordinatensystem! Weisen Sie durch Rechnung nach, dass es zwei Punkte gibt, die zu den Graphen dieser drei Funktionen gehören!
Untersuchen Sie, ob die Graphen der Funktionen f und h noch einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen! Geben Sie gegebenenfalls dessen Koordinaten an! **8 BE**

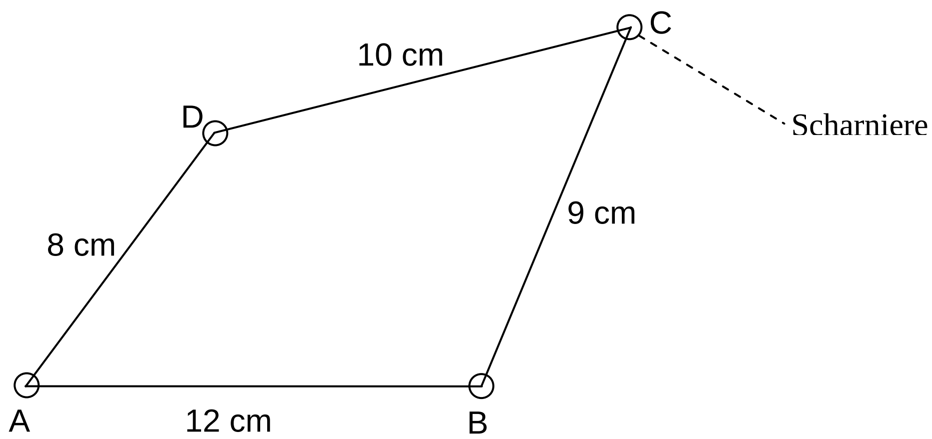
b) Angeregt durch diese Folien zeichnen Anne und Markus selbst Funktionsgraphen. Sie wählen dazu die Funktionen f und g mit den Gleichungen $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ mit $x \geq 0$ und
$y = g(x) = a \cdot 2^x$ aus.
Für welchen Wert von a haben die Graphen von f und g an der Stelle $x_S = 8$ einen gemeinsamen Punkt?
(Kontrollergebnis: $a = \frac{1}{128}$)
Bestimmen Sie für diesen Wert von a die Stelle x, für die g(x) =512 gilt!
Ermitteln Sie eine Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f ! **4 BE**

Aufgabenteile c) und d) auf Seite 8

c) Anne räumt Körpermodelle ein. Dabei hält sie das Modell einer geraden quadratischen Pyramide mit einer Höhe von 30 cm und einer Grundkantenlänge von 20 cm sowie das Modell eines geraden Kreiskegels mit einer Höhe von 30 cm und einen Grundflächendurchmesser von 20 cm in der Hand.
In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Körpermodelle?
Wie groß muss der Grundflächendurchmesser des Modells eines geraden Kreiskegels mit einer Höhe von 30 cm sein, damit dieses dasselbe Volumen hat wie das Modell der oben beschriebenen Pyramide?

5 BE

d) Markus findet ein Modell eines Vierecks mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 9\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$. Die Scharniere an den Ecken sind beweglich, lassen also unterschiedliche Winkelgrößen zu.



(Skizze nicht maßstäblich)

Markus hält das Modell zunächst so, dass A, D und C auf einer Geraden liegen. Wie groß ist der Winkel $\angle ACB$?
Jetzt hält er das Modell so, dass bei B ein rechter Winkel entsteht.
Wie groß ist der Winkel $\angle ACB$ jetzt?

3 BE