LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Klausur unter Abiturbedingungen **2004**

Mathematik

Leistungskurs

Aufgaben **für Schülerinnen und Schüler**

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie und Algebra
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Bearbeitungszeit:	4 Zeitstunden

Aufgabe 1

Gegeben sind drei Punkte $A(1|6|4)$, $B(-1|4|-2)$ und $C(4|-2|2)$ und eine Ebenenschar E_k mit der Gleichung $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 22-4k \\ 11+7k \\ -11-k \end{pmatrix} = 44+34k$; $k \in R$.

1.1 Stellen Sie das Dreieck *ABC* in einem Koordinatensystem räumlich dar und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene E_{ABC} an, die die Punkte *A*, *B* und *C* enthält, und formen Sie diese in eine Koordinatenform um.

Begründen Sie, warum die Ebene *F* mit der Gleichung $-4x-2y+2z=28$ parallel zur Ebene E_{ABC} verläuft, und berechnen Sie den Abstand der beiden Ebenen.

1.2 Zeigen Sie, dass die Ebene E mit der Gleichung $2x+y-z=4$ eine Ebene der Schar E_k darstellt und ermitteln Sie den zugehörigen Parameter *k*.
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen E_0 und E_{-3}.

Gibt es in der Ebenenschar E_k eine zu *E* senkrechte Ebene? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g zwischen E_0 und E_{-3} und weisen Sie nach, dass sich auch alle anderen Ebenen der Schar in *g* schneiden.

Aufgabe 2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|-2|2)$ und $B(-1|2|0)$, die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in R$ sowie die Ebene E mit $E: x + 2y + 3z = 4$ gegeben.

C_t sei ein beliebiger Punkt auf der Geraden g.

Die Gerade durch die Punkte A und B werde h genannt.

2.1 Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene H, die die Gerade g und den Punkt A enthält, in Parameterdarstellung und in Normalenform.
Untersuchen Sie die Lage des Punktes B zur Ebene H.

2.2 Zeigen Sie, dass die Geraden g und h parallel verlaufen, jedoch nicht identisch sind.

Ermitteln Sie, für welche reellen Zahlen t die Dreiecke ABC_t bei B einen stumpfen Winkel haben.

Beweisen Sie, dass alle Dreiecke ABC_t den gleichen Flächeninhalt besitzen, und berechnen Sie diesen.

2.3 Die Ebene E schließt mit den drei Koordinatenebenen eine Pyramide $OS_xS_yS_z$ ein, wobei S_x, S_y und S_z die Durchstoßpunkte der drei Koordinatenachsen durch die Ebene E sind.

Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden g mit den drei Koordinatenebenen und untersuchen Sie, ob die Gerade g und die Pyramide $OS_xS_yS_z$ gemeinsame Punkte enthalten.

Aufgabe 3

Es seien die Geraden g und h durch die Gleichungen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \; r, s \in R,$$

die vier Punkte $P(0\,|\,1\,|\,-1)$, $Q(-2\,|\,5\,|\,-3)$, $S(2\,|\,-1\,|\,3)$ und $T(1\,|\,2\,|\,4)$ sowie

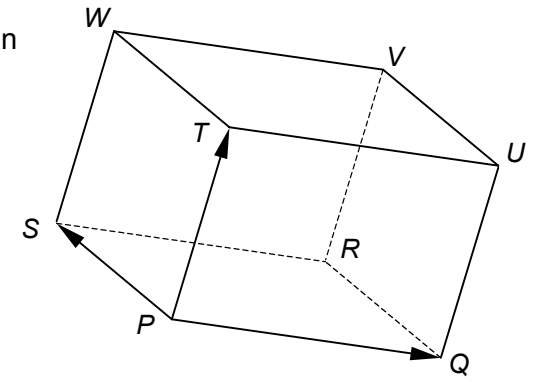
eine Ebenenschar $F_t: (4t-11)x + (1{,}5t-4)y + (3-t)z + 7 - 2{,}5t = 0;\; t \in R$ gegeben.

3.1 Weisen Sie nach, dass der Punkt Q auf der Geraden h liegt und die Geraden g und h zueinander parallel verlaufen.

Berechnen Sie den Abstand der Geraden g und h.

Ermitteln Sie den Punkt R auf der Geraden g, der das Dreieck PQS zu einem Parallelogramm $PQRS$ ergänzt. (Die Bezeichnung der Eckpunkte soll in alphabetischer Reihenfolge und in mathematisch positivem Sinn erfolgen.) (Kontrollergebnis R (0|3|1))

3.2 Die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$ und $\overrightarrow{PT}$ spannen den Spat $PQRSTUVW$ gemäß der nebenstehenden Skizze auf.



Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Punkte U, V und W.

Berechnen Sie das Volumen dieses Spates.

Der Punkt D sei Schnittpunkt der Raumdiagonalen dieses Spates.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumina der Pyramide $PQRSD$ und des Spates.

Eine Seitenfläche des Spates enthält die Punkte P und Q, nicht aber den Punkt R.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der diese Seitenfläche liegt.

Zeigen Sie, dass E identisch ist mit der Ebene F_0 der Ebenenschar F_t.

3.3 Zeigen Sie, dass eine Ebene H mit den beiden folgenden Eigenschaften existiert:

(1) $H \perp F_t$ für alle $t \in R$ und

(2) $P \in H$

Geben Sie eine Gleichung von H an.

LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Klausur unter Abiturbedingungen **2004**

Mathematik

Leistungskurs

Aufgaben **für Schülerinnen und Schüler**

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Bearbeitungszeit:	4 Zeitstunden

Aufgabe 1

Gegeben seien die Ebene *H*, in der die Punkte *A*(3|2|0), *B*(-3|6|-2), *C*(-5|4|0) und *D*(1|0|2) liegen, der Punkt *S*(0|7|5), die Ebene *E* mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(r, s \in R)$ und eine Gerade *g* mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $(t \in R)$.

1.1 Weisen Sie nach, dass es sich bei dem Viereck *ABCD* um ein Rechteck handelt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Diagonalen des Rechtecks *ABCD.*

Bestimmen Sie eine Geradengleichung der Winkelhalbierenden des Winkels DAB. Erläutern und begründen Sie Ihr Vorgehen.

1.2 Durch die Punkte *A, B, C, D* und *S* wird eine Pyramide im Raum beschrieben. Das Rechteck *ABCD* sei die Grundfläche und der Punkt *S* die Spitze der Pyramide *ABCDS*.

Die Gerade *g* steht senkrecht zur Grundfläche der Pyramide *ABCDS*. Weisen Sie nach, dass der Punkt *S* auf der Geraden *g* liegt.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden *g* mit der Grundfläche der Pyramide *ABCDS*.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide *ABCDS*.

1.3 Weisen Sie nach, dass der Punkt *S* in der Ebene *E* liegt.

Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Ebene *E* und der Ebene *H*.

Bestimmen Sie eine Gleichung für die Ebene *K*, die durch Spiegelung der Ebene *E* an der Ebene *H* entsteht.

Aufgabe 2

Gegeben sind eine Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \in R)$ sowie die Punkte $P(1|1|2)$,

$Q(5|-1|2)$ und $R(5|5|2)$.

2.1 Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt.

Die Gerade g und der Punkt P liegen in einer Ebene H.

Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene H in Koordinatenform (parameterfrei) und berechnen Sie die Koordinaten der Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen mit der Ebene H.

(**Zur Kontrolle:** H: $4x + 3y - 2z = 3$)

Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden k mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(s \in R)$ zur Ebene H.

2.2 Die Punkte P, Q und R, die ein Dreieck PQR bilden, liegen in der Ebene K.

Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene K bezüglich des Koordinatensystems.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR.

Untersuchen Sie, ob ein Punkt der Geraden g der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks PQR sein kann.

Aufgabe 3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $P_a(3a \mid -2a \mid 1-2a)$ mit $a \in R$, die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r \in R$ und die Ebenenschar $E_t: -3x + ty - 6z + 9t = 0$ mit $t \in R$ gegeben.

3.1 Zeigen Sie, dass die Gerade *g* die Ebene E_4 durchstößt, und berechnen Sie den Durchstoßpunkt.

Die Menge aller gegebenen Punkte P_a beschreibt eine Gerade *p*. Geben Sie eine Parametergleichung dieser Geraden an.

Ermitteln Sie den Parameter *a* so, dass der Punkt P_a in der Ebene E_4 liegt. Geben Sie die Koordinaten dieses Punktes P_a an.

3.2 Zeigen Sie, dass sich die Ebenen E_1 und E_{-1} schneiden. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden *s* und weisen Sie nach, dass die Gerade *s* Schnittgerade aller Ebenen der Schar E_t ist.

(Zur Kontrolle: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $v \in R$ **)**

Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden *g* und *s*.

3.3 Fast jeder der Punkte P_a gehört zu einer Ebene der Schar E_t. Stellen

Sie einen funktionalen Zusammenhang zwischen *a* und *t* her, sodass *a* in Abhängigkeit von *t* dargestellt wird.

LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Klausur unter Abiturbedingungen **2004**

Mathematik

Leistungskurs

Aufgaben **für Schülerinnen und Schüler**

Thema/Inhalt:	Stochastik
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/Formelsammlung
Bearbeitungszeit:	4 Zeitstunden

Aufgabe 1

1.1 In einer Urne U_1 befinden sich 6 rote und 4 weiße Kugeln.

1.1.1 Aus U_1 werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Alle Kugeln sind rot.

B: Mindestens eine Kugel ist rot.

C: Die zweite gezogene Kugel ist weiß.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Ziehen ohne Zurücklegen die zuerst gezogene Kugel weiß ist, wenn bekannt ist, dass die zweite Kugel auch weiß ist.

1.1.2 Aus der Urne U_1 werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Berechnen Sie nunmehr die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.

Wie viele Kugeln muss man mit Zurücklegen ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 wenigstens eine rote Kugel zu ziehen?

1.1.3 Aus U_1 wird eine Kugel entnommen, anschließend werden sie selbst und eine weitere Kugel der gleichen Farbe in die Urne zurückgelegt, die Kugeln werden gemischt, und eine neue Kugel wird gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

D: Beide Kugeln sind rot.

E: Beide Kugeln sind gleichfarbig.

F: Beide Kugeln sind verschiedenfarbig.

1.2 Eine Urne U_2 enthält **r** rote und **w** weiße Kugeln. Der Urne wird eine Kugel zufällig entnommen und ihre Farbe festgestellt. Anschließend wird die gezogene Kugel zusammen mit **k** Kugeln der gleichen Farbe in die Urne zurückgelegt.

1.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei den ersten beiden Zügen zwei verschiedenfarbige Kugeln auftreten.

1.2.2 Beschreiben Sie, wie sich die unter 1.2.1 ermittelte Wahrscheinlichkeit verändert, wenn für die Kugelanzahl **k** gelten soll: $k \to \infty$.

Aufgabe 2

2.1 Ein Sportverein möchte für seine jüngsten Mitglieder ein Kinderfest organisieren.

2.1.1 In dessen Vorbereitung soll durch Losentscheid ein Organisationsausschuss bestehend aus fünf Mitgliedern gebildet werden, für den sich sechs Muttis und fünf Vatis, darunter der Vereinsvorsitzende, bewerben.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Es werden genau zwei Muttis ausgewählt.

B: Der Vereinsvorsitzende wird ausgewählt.

C: Es werden mindestens zwei Vatis ausgewählt.

2.1.2 Der Organisationsausschuss plant, während des Kinderfestes ein Volleyballspiel zwischen einer Kinder- und einer Elternmannschaft durchzuführen.

Sieger ist, wer zuerst zwei Sätze gewonnen hat.

Ermitteln Sie Erwartungswert und Standardabweichung der insgesamt zu spielenden Sätze, wenn beide Mannschaften als gleich stark einzuschätzen sind.

2.2 Während des Kinderfestes sollen zwei Glücksräder G_1 und G_2 zum Einsatz kommen.

Das Glücksrad G_1 ist in drei gleich große Sektoren mit den Farben rot, weiß und gelb unterteilt. Das Glücksrad G_2 enthält einen weißen und einen gelben Sektor mit

P(gelb) = p $(0 < p < 1)$.

2.2.1 Das Glücksrad G_1 werde zweimal gedreht.

Untersuchen Sie die Ereignisse auf (stochastische) Abhängigkeit:

D: Es tritt genau einmal rot auf und

E: Es treten verschiedene Farben auf.

2.2.2 Der Organisationsausschuss hat sich für das Glücksrad G_1 folgende zwei Spielregeln ausgedacht:

(I): Der Spieler dreht das Rad zweimal und erhält einen Preis, wenn er mindestens einmal auf den roten Sektor kommt.

(II): Der Spieler dreht das Rad dreimal und erhält einen Preis, wenn das Glücksrad mindestens zweimal auf rot zeigt.

Untersuchen Sie, welche der beiden Spielregeln dem Spieler eine höhere Gewinnchance bietet.

2.2.3 Das Glücksrad G_2 werde dreimal gedreht. Gewonnen hat man, wenn stets der gleiche Sektor auftritt.

Ermitteln Sie die Größe des gelben Sektorenwinkels für den Fall, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit minimal wird.

Aufgabe 3

An einem Gymnasium des Landes Brandenburg möchte der Abiturjahrgang durch eine Tombola zur Finanzierung seiner Abiturfeier beitragen. Dazu fertigen einige Schüler 1000 Lose an, die zum Preis von je 1 € verkauft werden sollen. Sie beschließen folgende Gewinnverteilung unter den 1000 Losen:

600 Nieten und

400 Gewinnlose, davon 300 Lose mit dem Gewinn von 1 €,
50 Lose mit dem Gewinn von 2 €,
30 Lose mit dem Gewinn von 5 €,
15 Lose mit dem Gewinn von 10 € ,
4 Lose mit dem Gewinn von 25 € und
ein Los mit dem Hauptgewinn von 100 €.

3.1 Die Zufallsgröße A gebe den Auszahlungsbetrag an den Loskäufer und die Zufallsgröße G den resultierenden Gewinn bzw. Verlust des Loskäufers an.

3.1.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen A und G.

3.1.2 Wie viel Prozent der Einnahmen werden wieder als Gewinn ausgeschüttet? Begründen Sie Ihre Aussage.

3.1.3 Berechnen Sie Erwartungswert und Streuung der Zufallsgrößen A und G.

3.2 Nach der Aufstellung der Übersicht der Gewinnverteilung regen einige der Tombolaausrichter an, das Verfahren zu vereinfachen. Sie beschließen eine Verteilung nach folgendem Muster:
Es soll weiterhin 600 Nieten und 400 Gewinnlose – jetzt aber mit dem gleichen Gewinn pro Los von x € – geben. Die Zufallsgröße X bezeichne den Auszahlungsbetrag an den Loskäufer je gezogenes Los.

3.2.1 Ermitteln Sie x so, damit die Erwartungswerte der Zufallsgrößen A und X gleich sind.

3.2.2 Weisen Sie nach, dass sich für die Zufallsgröße X eine Streuung von rund 1,10 € ergibt.

3.2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Kauf von 4 Losen, wenigstens ein Gewinnlos erworben zu haben.

3.2.4 (1) Berechnen Sie, wie viele Lose man mindestens kaufen muss, damit die Chance auf wenigstens ein Gewinnlos größer als 95% ist.

(2) Man kann eine Näherungsformel zur Berechnung von (1) aufstellen, wenn die Anzahl N der insgesamt vorhandenen Lose im Vergleich zur Anzahl n der gezogenen Lose sehr groß ist. Das ist mit N = 1000 und z.B. $n_{max} = 20$ erfüllt (n_{max} soll einen möglichen Maximalwert für n angeben).
Ermitteln Sie eine Näherungsformel zur Lösung der Aufgabenstellung (1) und berechnen Sie die Mindestanzahl der zu kaufenden Lose. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus (1).