Abiturprüfung 2004

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

Falls das Thema GM1.I gewählt wird, ist die Angabe vom Prüfling mit dem Namen zu versehen und mit abzugeben.

Name:___________________________

GM1. INFINTESIMALRECHNUNG

BE

I.

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion

$f : x \mapsto 2 \cdot \dfrac{e^x - 4}{e^x + 4}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

4 1. a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S von G_f mit der y-Achse. Bestimmen Sie rechnerisch das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.
(Hinweis: Zur Bestimmung des Grenzwerts für $x \to +\infty$ kann z. B. zunächst im Zähler und Nenner e^x ausgeklammert werden.)

5 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f mit Hilfe der ersten Ableitung.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = 16 \cdot \dfrac{e^x}{(e^x + 4)^2}$]

7 c) $W(\ln 4 \mid 0)$ ist der einzige Wendepunkt des Graphen G_f (Nachweis nicht verlangt). Zeigen Sie, dass die Gerade n mit der Gleichung $y = -x + \ln 4$ durch W verläuft und auf der Wendetangente senkrecht steht.
Ergänzen Sie n in nebenstehender Abbildung.
Berechnen Sie den Abstand des Ursprungs von der Geraden n.

3 2. a) Begründen Sie, dass f umkehrbar ist, und geben Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} an.

3 b) Zeichnen Sie den Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion in die nebenstehende Abbildung ein.

4 c) Geben Sie jeweils ein Beispiel an für den Term
– einer Funktion g mit $D_g = \mathbb{R}$, die wie f die Nullstelle $\ln 4$ hat, aber nicht umkehrbar ist;
– einer Funktion h mit $D_h = \mathbb{R}$, die wie f die Nullstelle $\ln 4$ hat und umkehrbar ist, deren Umkehrfunktion aber in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

4 3. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto 4 \cdot \ln(e^x + 4) - 2x$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

6 b) Der Schnittpunkt von G_f und $G_{f^{-1}}$ hat näherungsweise die Koordinaten $(-1{,}8 \mid -1{,}8)$. Kennzeichnen Sie in der Abbildung die Fläche, deren Inhalt durch $A = \int_{-1{,}8}^{\ln 4} (x - f(x))\,dx$ angenähert wird.
Berechnen Sie A.

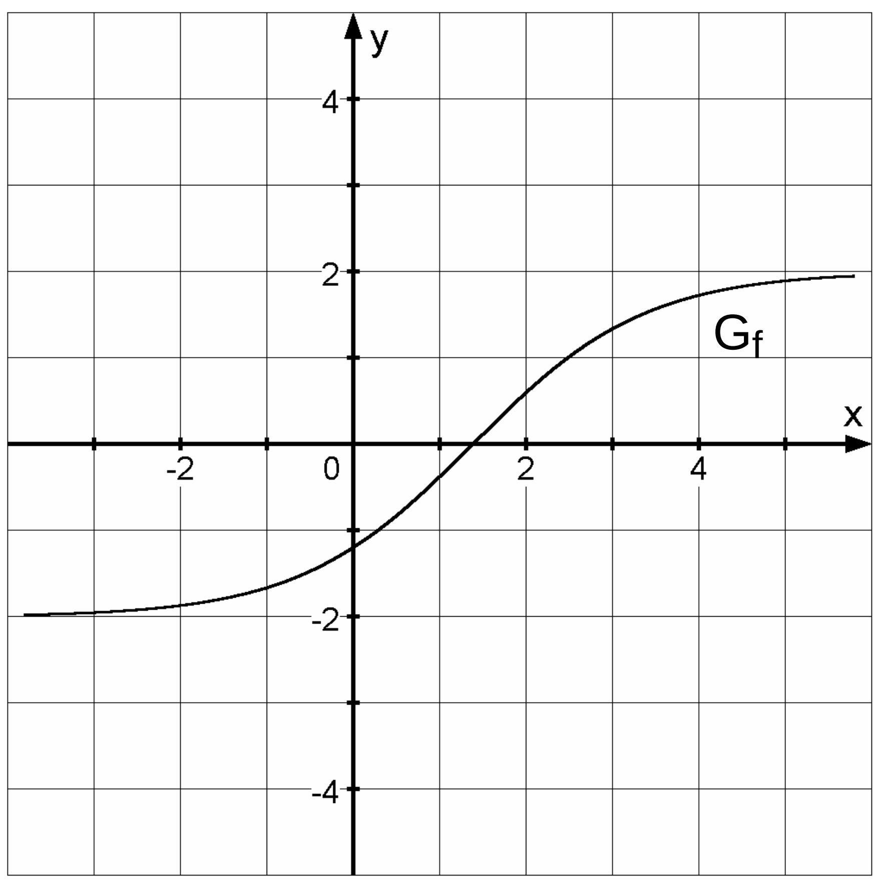
4 c) Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses für A einen Näherungswert für den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f, $G_{f^{-1}}$ und der Geraden n eingeschlossen wird.

40

Zu Aufgabe GM1.I

Die Angabe ist mit abzugeben.

Name:..
(vom Prüfling einzutragen)



BE

II.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{(x+2)^2}{x^2}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

6 1. a) Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Untersuchen Sie G_f auf gemeinsame Punkte mit der waagrechten Asymptote.

6 b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts E von G_f ohne Verwendung der zweiten Ableitung.

[zur Kontrolle: $f'(x) = -4 \cdot \frac{x+2}{x^3}$]

3 c) Machen Sie ohne weitere Rechnung plausibel, dass G_f im zweiten Quadranten einen Wendepunkt hat.

6 d) Berechnen Sie $f(-0{,}75)$, $f(1)$, $f(2)$ und $f(6)$.

Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. Berücksichtigen Sie dabei, dass der einzige Wendepunkt von G_f der Punkt $W\left(-3 \mid \frac{1}{9}\right)$ ist (Nachweis nicht erforderlich).

9 e) Der Extrempunkt E und der Punkt $P(-1 \mid y_P)$ des Graphen G_f legen die Strecke [EP] fest. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die diese Strecke mit G_f einschließt.

(Hinweis: Formen Sie zur Bestimmung einer Stammfunktion von f den Funktionsterm in eine Summe um.)

2. Gegeben ist nun zusätzlich die Geradenschar $g_a: x \mapsto ax - 2a + 4$ mit $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

4 a) Zeigen Sie, dass alle Schargeraden durch den Punkt $Q(2 \mid 4)$ verlaufen. Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Gerade g_a Tangente an G_f im Punkt Q ist.

6 b) Wie viele Geraden der Schar haben mit G_f genau zwei Punkte gemeinsam? (Überlegung am Graphen genügt.)

Beschreiben Sie jeweils die Lage dieser Geraden und zeichnen Sie die Geraden in das Koordinatensystem von Aufgabe 1d ein.

40

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

Die Bezeichnungen „Abiturienten“ und „Schüler“ beziehen sich im folgenden Text sowohl auf männliche als auch auf weibliche Personen.

Die 100 Abiturienten eines bayerischen Gymnasiums treffen sich am Tag des schriftlichen Grundkursabiturs vor der großen Turnhalle der Schule. Darin sind die Plätze in zehn Reihen zu je zehn Einzelplätzen angeordnet (regelmäßige Anordnung in Form eines Rechtecks) und fortlaufend von 1 bis 100 nummeriert. Beim Betreten des Prüfungsraums zieht jeder Prüfling eine Platznummer im Losverfahren.

2 1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt Andrea nicht auf einem Eckplatz?

4 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt Bernd auf einem Platz, der auf allen vier Seiten von Mitschülern umgeben ist?

Eine Gruppe von sieben Schülern hat sich gemeinsam auf Stochastik vorbereitet.

7 c) Peter wünscht sich: „Hoffentlich sitzen wir alle sieben im Grundkurs-Abi in der letzten Reihe.“ Marion meint: „Egal in welcher Reihe, Hauptsache, wir sitzen in derselben Reihe.“ Gabi hört sich Peters und Marions Wunsch an und vermutet: „Da habe ich eher am nächsten Samstag einen ‚Sechser’ im Lotto.“ Nehmen Sie zu Gabis Vermutung Stellung. (Die Wahrscheinlichkeit für einen „Sechser“ im Lotto beträgt ungefähr 1 zu 14 Millionen.)

5 d) Beim Verlassen der Turnhalle erhält jeder Prüfling einen Fragebogen zu seinen Zukunftsplänen. Damit dieser auch ausgefüllt und abgegeben wird, werden Bücher verlost, wobei jeder Bogen mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus der siebenköpfigen Lerngruppe mindestens zwei ein Buch gewinnen, wenn alle ihren Bogen abgeben?

2. Durch obige Befragung der 100 Prüflinge soll die Hypothese getestet werden, dass höchstens 25 % der Prüflinge dieses Abiturjahrgangs in Bayern noch nicht wissen, wie sie sich nach der Abiturprüfung beruflich orientieren sollen. Es wird davon ausgegangen, dass die 100 Abiturienten dieser Schule einer zufälligen Auswahl bayerischer Abiturienten entsprechen. Sollten mehr als 32 der 100 Schüler noch unentschlossen sein, wird die Hypothese abgelehnt.

5 a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese abgelehnt wird, obwohl 25 % der Prüflinge in Bayern noch nicht wissen, wie sie sich beruflich orientieren sollen.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

7 b) Schildern Sie eine Situation, in der bei obigem Test ein Fehler zweiter Art auftritt.
Berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art für ein von Ihnen gewähltes Zahlenbeispiel.

3. Von den 100 Abiturienten des Prüfungsjahrgangs erreichen die 24 Jahrgangsbesten eine Gesamtnote, die mit einer 1 vor dem Komma beginnt. Es werden die Ereignisse „Ein zufällig ausgewählter Abiturient gehört zu den 24 Jahrgangsbesten“ und „Ein zufällig ausgewählter Abiturient ist weiblich“ betrachtet.

4 a) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse stochastisch abhängig sind, falls sich im gesamten Prüfungsjahrgang 37 und unter den Jahrgangsbesten 11 Frauen befinden.

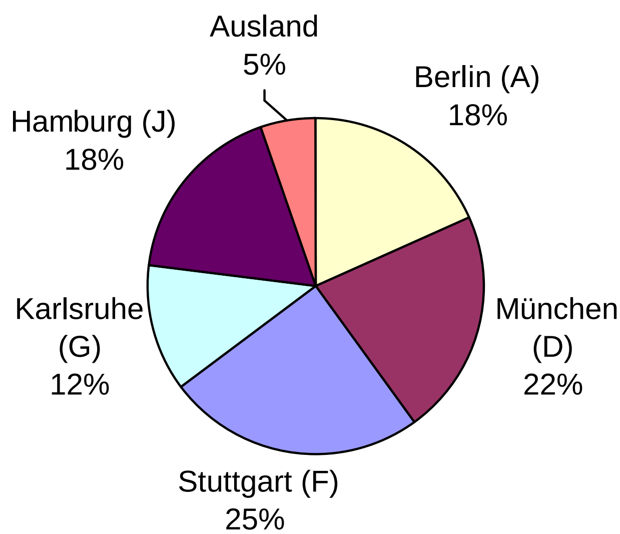
6 b) Wie viele Frauen müssen unter den 24 Besten und wie viele unter den gesamten 100 Abiturienten sein, damit obige Ereignisse stochastisch unabhängig sind? Bestimmen Sie alle Möglichkeiten.
(Eine reine Knaben- bzw. Mädchenschule kann auf Grund der in Aufgabe 1 genannten Schüler ausgeschlossen werden.)

40

BE

IV.

Euro-Münzen werden in Deutschland an fünf verschiedenen Prägestätten hergestellt. Der Prägeort wird durch einen Kennbuchstaben auf der Münze angegeben (Zuordnung siehe Diagramm).
Für die sich in Deutschland im Umlauf befindenden 2-Euro-Münzen werden unter Einbeziehung ausländischer Münzen folgende Anteile angenommen:



Man geht von einer guten Durchmischung der Euro-Münzen in Deutschland aus.

4 1. a) In Deutschland sind 230 Millionen 2-Euro-Münzen mit dem Prägeort Hamburg im Umlauf. Berechnen Sie, wie viele 2-Euro-Münzen insgesamt in Deutschland im Umlauf sind (Rundung auf Millionen).
Wie groß ist der Anteil der 2-Euro-Münzen mit Prägeort Berlin unter allen deutschen 2-Euro-Münzen?

3 b) Brigitte hat fünf 2-Euro-Münzen im Geldbeutel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau drei mit Prägeort München dabei?

4 c) Beschreiben Sie kurz ein zum Sachzusammenhang passendes Zufallsexperiment und dazu ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit $3! \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}12$ beträgt.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
5	d) Dieter sammelt 2-Euro-Münzen. Er untersucht die nächsten 2-Euro-Münzen, die er bekommt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entdeckt er bei der fünften untersuchten Münze zum zweiten Mal den Kennbuchstaben D?
5	e) Wie viele 2-Euro-Münzen muss Dieter mindestens untersuchen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % wenigstens eine ausländische 2-Euro-Münze findet?
	2. Dieter bewahrt fünf verschiedene deutsche 2-Euro-Münzen und sechs verschiedene ausländische 2-Euro-Münzen in einem Kästchen auf.
4	a) Er greift blind in das Kästchen und hat fünf Münzen in der Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau zwei deutsche 2-Euro-Münzen?
4	b) Er legt nun alle elf verschiedenen Münzen nebeneinander auf den Tisch. Auf wie viele verschiedene Arten kann er sie anordnen, wenn die fünf deutschen 2-Euro-Münzen nebeneinander liegen sollen?
	3. Ein Münzhändler behauptet, dass eine große Urne, die mit sehr vielen 1-Cent-Münzen gefüllt ist, mindestens 10 % finnische 1-Cent-Münzen enthält. Diese haben als einzige Münzen in der Urne Sammlerwert.
5	a) Dieter zahlt 15 € und darf dafür 20 Münzen aus der Urne ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht das Geschäft für Dieter günstig aus, falls 10 % finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind und Dieter einen Sammlerwert von 6 € für eine solche Münze ansetzt?
6	b) Dieter äußert Skepsis gegenüber der Behauptung des Münzhändlers. Dieser bietet Dieter an, die Hypothese, dass mindestens 10 % finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind, mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang 200 zu testen. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese irrtümlich abgelehnt wird, höchstens 5 % sein soll.
40	

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

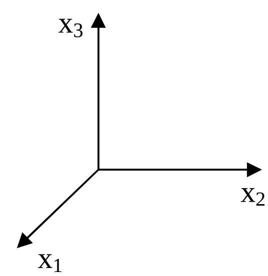
V.

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(0|0|2)$, $B(0|0|8)$ und $C(0|4{,}8|0)$. Die Gerade g verläuft durch A und ist parallel zur x_1-Achse.

5 1. a) Die Gerade g und der Punkt C bestimmen die Ebene E. Zeigen Sie, dass $5x_2 + 12x_3 - 24 = 0$ eine Gleichung von E ist.

3 b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E mit der x_1x_2-Ebene.

5 c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie die bisherigen Punkte und Geraden ein. Kennzeichnen Sie in der Zeichnung die Schnittgeraden der Ebene E mit den drei Koordinatenebenen.
(Ganze Seite; Ursprung in Blattmitte)



5 2. a) Begründen Sie, dass die Punkte A und C mit jedem von A verschiedenen Punkt $P(x_1|0|2)$ der Geraden g ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Berechnen Sie dann den Wert $x_1 > 0$ so, dass das Dreieck zudem gleichschenklig ist; dieses Dreieck wird mit ACD bezeichnet.

[Zur Kontrolle: $D(5{,}2|0|2)$]

6 b) Tragen Sie in Ihre Zeichnung die Kanten der Pyramide ABCD ein. Wie groß sind in diesem Körper die Höhen, die auf den Grundflächen ABD bzw. ACD senkrecht stehen? (In einem Fall ist das Maß aus der Zeichnung ohne Rechnung ersichtlich.)

3. Durch den Punkt B verläuft parallel zur x_2-Achse die Gerade h. Auf der Geraden h liegen die Mittelpunkte M_1 und M_2 zweier Kugeln K_1 und K_2. Die Kugeln haben den Radius 7 ; der Punkt $Q(2|6|5)$ liegt sowohl auf K_1 als auch auf K_2.

6 a) Berechnen Sie die Koordinaten von M_1 und M_2. (M_2 sei der Mittelpunkt mit positiver x_2-Koordinate.)

[Ergebnis: $M_1(0|0|8)$, $M_2(0|12|8)$]

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	b) Die beiden Kugeln schneiden sich in einem Kreis. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, in der dieser Schnittkreis liegt, sowie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises.
4	c) Eine weitere Kugel K_3 mit Mittelpunkt M_1 hat den Radius R. Für welche Werte von R hat diese Kugel einen Schnittkreis mit K_2? Erläutern Sie Ihre Lösung.
40	

BE

VI.

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem der Punkt $P(-3|0|4)$, die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 7 = 0$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } l \in \mathbb{R}.$$

3 1. a) Zeigen Sie, dass der Punkt P auf der Geraden g, aber nicht in der Ebene E liegt.

4 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene E. [Ergebnis: $S(-6|3|1)$]

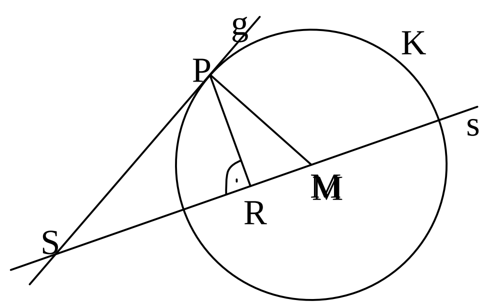
6 c) Zeigen Sie, dass der Punkt $R(-5|-1|2)$ Fußpunkt des Lots von P auf die Ebene E ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P', den man durch Spiegelung des Punktes P an der Ebene E erhält.

4 d) Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks SPP'.

4 2. Die Ebene $F: x_1 - x_3 + 7 = 0$ enthält die Gerade g (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie eine Gleichung für die Schnittgerade s der beiden Ebenen E und F.

[mögliches Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$]

3. Der Punkt M auf der Geraden s ist Mittelpunkt der Kugel K, die g in P berührt.
Die nebenstehende Skizze zeigt die gegenseitige Lage der Geraden g und s sowie der Punkte S, R, P und M.



5 a) Ermitteln Sie die Koordinaten von M. [Ergebnis: $M(-4{,}5|-3|2{,}5)$]

4 b) Bestätigen Sie, dass die Ebenen E und F aufeinander senkrecht stehen, und beschreiben Sie die Lage beider Ebenen bezüglich der skizzierten Konstellation.

5 c) Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks SMP.

5 d) Es existieren zwei Wege von P nach P', die auf der Oberfläche von K und zugleich in der Ebene F verlaufen. Berechnen Sie die kürzere der beiden Weglängen.

40