Abiturprüfung 2005

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

Falls das Thema GM1.II gewählt wird, ist die Angabe vom Prüfling mit dem Namen zu versehen und mit abzugeben.

Name:_________________________

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 1-(\ln x)^2$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

4 1. a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

7 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts E von G_f. Geben Sie die Wertemenge W_f von f an. [Teilergebnis: E(1|1)]

3 c) Die einzige Wendestelle von f ist $x_W = e$ (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w. [Zur Kontrolle: $y = -\frac{2}{e} \cdot x + 2$]

6 d) Berechnen Sie $f(e^{-2})$ und f(6). Zeichnen Sie die Wendetangente w und den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 6$.

2. Die Funktion $F: x \mapsto -x(\ln x - 1)^2$ mit $D_F = \mathbb{R}^+$ ist Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich).

4 a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der x-Achse im ersten Quadranten begrenzt wird.

3 b) Begründen Sie, dass die Stammfunktion F zugleich die Integralfunktion $x \mapsto \int_e^x f(t)\,dt$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ ist.

4 c) Berechnen Sie $\lim_{x \to 0+} F(x)$. Deuten Sie dieses Ergebnis anhand des Graphen G_f geometrisch.
(Hinweis: $\lim_{x \to 0+} [x(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Durch zentrische Streckung von G_f mit dem Ursprung als Zentrum und dem Streckungsfaktor 2 erhält man den Graphen G_2 einer Funktion f_2.

5 a) Welche Koordinaten hat bei dieser Abbildung der Bildpunkt eines beliebigen Punktes $P(a \mid b)$ von G_f? Zeichnen Sie G_2 und seine Wendetangente w_2 in das Koordinatensystem von Aufgabe 1d ein.

4 b) Geben Sie den Funktionsterm von f_2 sowie ohne weitere Rechnung die Gleichung der Wendetangente w_2 an.

40

II.

Name:...
(vom Prüfling einzutragen)

BE	

1. Im Eingangsbereich eines Unternehmens soll das Firmenlogo im Boden eingelassen werden. Abb. 1 zeigt den Entwurf des Architekten nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems:

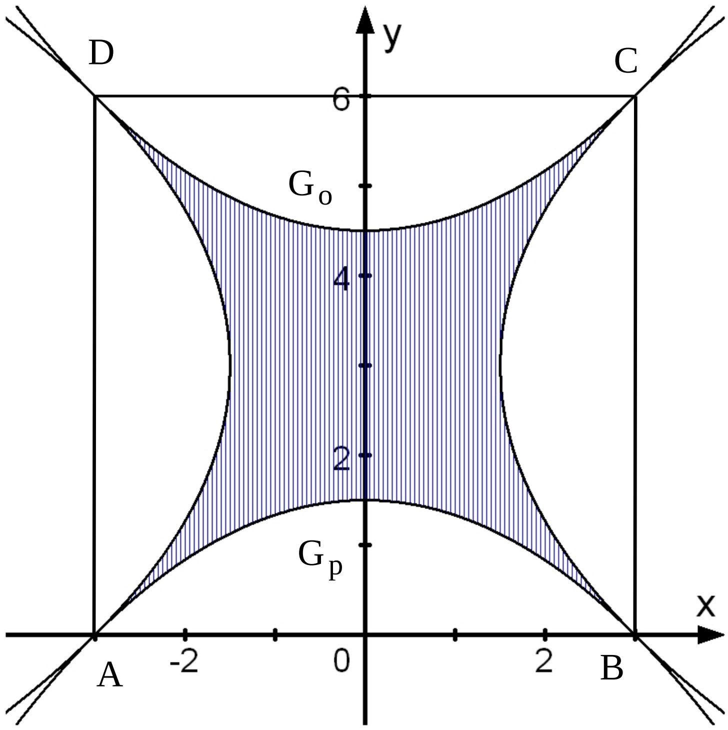


Abb. 1

Im Quadrat ABCD schneiden vier kongruente parabelförmige Bögen die in Abb. 1 schraffierte Figur aus. Die untere Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$. G_p schneidet die x-Achse in den Punkten $A(-3\,|\,0)$ und $B(3\,|\,0)$. Die Diagonalen des Quadrats sind zugleich Tangenten an die Parabeln in den Punkten A und C bzw. B und D.

6 a) Geben Sie die Werte der Ableitung von p in den beiden Nullstellen an und bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion p.

[Zur Kontrolle: $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 1{,}5$]

6 b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figur, wenn die Seitenlänge des Quadrats ABCD in der Eingangshalle 6 m beträgt.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

2. Die Graphen der linken, rechten und oberen Parabel in Abb. 1 gehen aus G_p durch Spiegelung und Verschiebung hervor. Daher können die zugehörigen Funktionsterme aus dem Funktionsterm von p entwickelt werden.

4 a) Erklären Sie zunächst allgemein, wie die Graphen zu den Zuordnungsvorschriften $x \mapsto p(x) + a$ bzw. $x \mapsto p(x+b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch Verschiebung aus G_p entstehen.

3 b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass zum Graphen G_o der oberen Parabel in Abb. 1 die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto -p(x) + 6$ gehört.

4 c) p ist in $[0; +\infty[$ umkehrbar. Ergänzen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion p^{-1} in Abb. 1.
Kennzeichnen Sie in Abb. 1 den Teil der Umrandung der schraffierten Figur, zu dem die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto p^{-1}(x+3) + 3$ gehört.

3. Betrachtet wird nun die Funktion

$$f: x \mapsto f(x) = \frac{p(x)}{x^2} = -\frac{1}{6} + \frac{1{,}5}{x^2}$$

mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (mit p aus Aufgabe 1). Der Graph G_f der Funktion f ist zusammen mit G_p in Abb. 2 dargestellt.

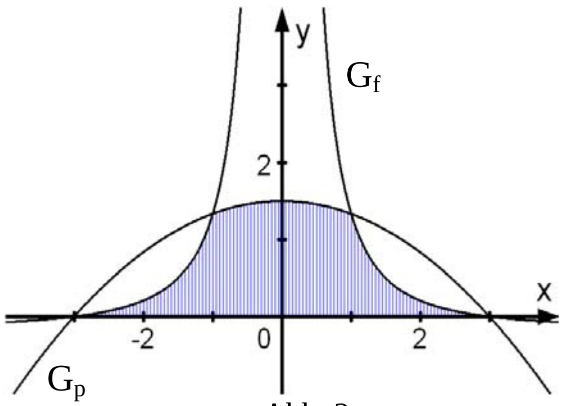


Abb. 2

Gemäß der Definition von f stimmen die Nullstellen von f mit den Nullstellen von p überein.

2 a) Weisen Sie nach, dass G_f achsensymmetrisch ist und untersuchen Sie das Verhalten von G_f für $x \to +\infty$.

6 b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an G_f in den beiden Nullstellen.

9 c) Bestätigen Sie, dass $S(1 \mid \frac{4}{3})$ ein weiterer Schnittpunkt von G_f und G_p ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des in Abb. 2 schraffierten Flächenstücks, das von G_f, G_p und der x-Achse begrenzt wird.

40

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE	III.
	Eine Software-Firma will neue Mitarbeiter einstellen. Es bewerben sich 56 Personen, von denen 32 einen Hochschulabschluss haben. 34 der Bewerber sind Männer, davon 20 mit Hochschulabschluss.
4	1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig aus den 56 Bewerbern ausgewählte Person weiblich und hat einen Hochschulabschluss? [Ergebnis: 21,4 %]
5	b) Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Ereignisse „Eine zufällig aus den Bewerbern ausgewählte Person ist weiblich“ und „Eine zufällig aus den Bewerbern ausgewählte Person hat einen Hochschulabschluss“ stochastisch unabhängig sind.
	2. Die Firma beschließt, die Bewerber in Gruppen zu einer Eignungsprüfung einzuladen. Für die erste Gruppe sollen aus den 56 Personen 6 Männer und 4 Frauen ausgewählt werden.
4	a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Gruppe zusammenzustellen?
6	b) Unter den 56 Bewerbern ist ein Ehepaar. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die erste Gruppe zusammenzustellen, wenn das Ehepaar entweder gemeinsam oder gar nicht dieser Gruppe angehören soll?
6	3. Der erste Teil der Eignungsprüfung ist ein Multiple-Choice-Test, bei dem 20 Fragen gestellt werden. Zu jeder Frage gibt es vier Antworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Wie viele richtige Antworten sind für das Bestehen des Tests mindestens zu verlangen, wenn die Wahrscheinlichkeit, den Test nur durch Raten zu bestehen, höchstens 0,1 % sein soll?
	4. Im zweiten Teil der Eignungsprüfung werden dem Bewerber Fragen aus den drei Gebieten Betriebssysteme, Programmieren und Datenbanken gestellt. Dabei wird jeweils zunächst eines der gleich wahrscheinlichen Fachgebiete zufällig ausgewählt und daraus dann eine Frage gestellt.
	Ein gut vorbereiteter Bewerber beantwortet bei den Fachgebieten Betriebssysteme und Programmieren nur 10 % der Fragen falsch, bei den Datenbanken sind 75 % seiner Antworten richtig.
5	a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Bewerber eine Frage im zweiten Teil der Eignungsprüfung korrekt beantwortet. [Ergebnis: 85 %]
4	b) Für welche Anzahlen n von Fragen gilt, dass dieser Bewerber mit mehr als 50 % Wahrscheinlichkeit alle n Fragen richtig beantworten kann?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	5. Die Firma vermutet, dass in der Software-Branche mindestens 60 % der Bewerber um eine Stelle eine solche Eignungsprüfung einem herkömmlichen Bewerbungsgespräch vorziehen würden. Kann diese Vermutung (Nullhypothese) auf dem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt werden, wenn bei einer Befragung von 200 zufällig ausgewählten Bewerbern nur 109 eine Eignungsprüfung bevorzugen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
40	

BE

IV.

In einem Theater gibt es insgesamt 1000 Plätze. 600 davon entfallen auf die Kategorie „Parkett", 250 auf die Kategorie „1. Rang" und 150 auf die Kategorie „2. Rang". In der heutigen Vorstellung ist jeder Platz belegt.

1. Es werden zufällig zwei der 1000 Besucher ausgewählt und die beiden folgenden Ereignisse A und B betrachtet:
   A: „Die beiden Besucher haben Karten im 1. Rang",
   B: „Die beiden Besucher haben Karten der gleichen Kategorie".

3 a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P(A) des Ereignisses A.
[Ergebnis: $P(A) \approx 6{,}23\ \%$]

4 b) Berechnen Sie für den in 1a ermittelten Wert P(A) einen Näherungswert, indem Sie die Auswahl der beiden Zuschauer als Ziehen mit Zurücklegen betrachten. Erklären Sie, warum die Abweichung zum exakten Wert sehr gering ist.

In den folgenden Teilaufgaben soll deshalb von einem Ziehen mit Zurücklegen ausgegangen werden.

6 c) Berechnen Sie P(B) und begründen Sie, dass die Ereignisse A und B stochastisch abhängig sind.

2. In der Pause verlassen 10 % der Besucher das Theater. Zur Vereinfachung soll davon ausgegangen werden, dass sie dies unabhängig voneinander tun.

4 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein Besucher, der nicht am Rand sitzt, damit rechnen, dass neben ihm genau ein Platz frei wird?

5 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden in einer Reihe mit 20 Plätzen genau 3 Plätze frei, die zugleich nebeneinander liegen?

5 c) Wie viele Plätze müsste eine Reihe wenigstens haben, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens ein Platz frei wird?

3. Der Theaterintendant behauptet, dass höchstens 20 % der Besucher mit den Eintrittspreisen unzufrieden sind. Um diese Hypothese zu testen, werden zufällig 50 der 1000 Besucher befragt.

6 a) Die Behauptung des Intendanten soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 4 % irrtümlich abgelehnt werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich.

7 b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   C: „Genau 5 der 50 Befragten haben eine Karte des 2. Rangs",
   D: „Mehr als 15 % der Befragten haben eine Karte des 1. Rangs".

40

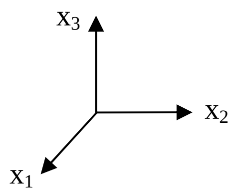
GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

Die Punkte $A(6|4|5)$, $B(4|4|3)$, $C(3|4|4)$ und $D(3|0|4)$ bilden eine dreiseitige Pyramide ABCD mit Spitze in D.

4 1. a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche ABC dieser Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck ist.



4 b) Tragen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein (vgl. Skizze).

5 c) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der die Grundfläche ABC der Pyramide liegt, in Normalenform auf.

4 d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

3 e) Ein Schatten der Pyramide in der x_1x_2-Ebene entsteht durch Parallelprojektion in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie diesen Schatten in das Koordinatensystem ein.

4 f) Durch Verschieben der Pyramidenspitze entlang einer Geraden entstehen weitere Pyramiden mit Grundfläche ABC. Für welche Gerade erhält man dabei Pyramiden, die bei der genannten Projektion denselben Schatten wie die ursprüngliche Pyramide ABCD werfen? Begründen Sie, warum jede dieser Pyramiden den gleichen Rauminhalt besitzt.

2. Man stelle sich die Gerade AD als Flugroute eines Passagierflugzeugs vor sowie einen Sportflieger, der entlang einer Geraden durch den Punkt $(0|-7|0)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fliegt.

9 a) Weisen Sie nach, dass die Flugbahn des Sportfliegers die des Passagierflugzeugs kreuzt und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Flugbahnen. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Flugbahnen?

7 b) Man stelle sich zudem den Punkt B als Gipfel eines steilen Berges vor. Wie nahe fliegt der Sportflieger am Gipfel vorbei?

40

BE

VI.

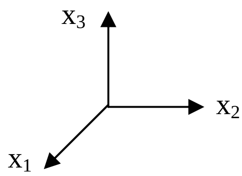
Gegeben sind die Gerade g durch die Punkte $A(0|3|0)$ und $B(7|4|5)$ sowie die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

4 1. a) Zeigen Sie, dass g und h eine Ebene E aufspannen.

5 b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: $2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3 = 0$]

7 c) C_1 und C_2 sind zwei Punkte der Geraden h, für die die Dreiecke ABC_1 bzw. ABC_2 bei C_1 bzw. C_2 rechtwinklig sind. Bestimmen Sie die Koordinaten beider Punkte. (Der Punkt mit ganzzahligen Koordinaten wird mit C_1 bezeichnet.) [Zur Kontrolle: $C_1(1|1|0)$]

4 d) Tragen Sie die Geraden g und h sowie das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem ein (vgl. Skizze).



3 e) Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Punkt N mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC_1 ist.

2. Das Dreieck ABC_1 ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S; M ist der Mittelpunkt der Dreiecksseite $[AC_1]$.

5 a) Für S gilt: Die Strecke [MS] steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene und hat die Länge 4, die x_3-Koordinate von S ist positiv.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S und zeichnen Sie M und die Pyramide in die Zeichnung von Teilaufgabe 1d ein.
[Zur Kontrolle: $S(0{,}5|2|4)$]

8 b) Begründen Sie, dass das Dreieck C_1AS achsensymmetrisch ist, und berechnen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.

4 c) Berechnen Sie die Höhe der Pyramide ABC_1S.

40