BAYERN Abitur 1985 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{10-5x}{x^3},$$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \infty$, $x \to -\infty$ und in der Umgebung von $x = 0$. (6 BE)

   (b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse. (1 BE)

   (c) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.
   [Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{10}{x^3} - \frac{30}{x^4}$] (8 BE)

   (d) Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung ber bisherigen Ergebnisse. Verwenden Sie auch die Punkte mit den Abszissen -4; -2; $-1,5$ und $+1$.
   (Längeneinheit 2 cm, Hochformat, Ursprung in Blattmitte, Bereich $-4 \leq x \leq 4$.) (6 BE)

2. (a) Bestimmen Sie die Zahlen a und b so, dass der Graph G_h von

   $$h : x \mapsto \frac{a}{x} + b$$

   ($\mathbb{D}_h = \mathbb{D}_f$) die Kurve G_f bei $x = 1$ berührt.
   [Ergebnis: $a = 20$, $b = -15$]
   Tragen Sie den Graphen G_h für $a = 20$ und $b = -15$ in die Figur der Aufgabe 1d im Bereich $1 \leq x \leq 2$ ein. (10 BE)

   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die von der x-Achse, G_f und G_h im 1. Quadranten eingeschlossen wird (Ergebnis auf drei Dezimalen genau). Verdeutlichen Sie den Anzatz für die Rechnung in der Figur. (9 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 1},$$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph sei mit G_f bezeichnet.

1. (a) Ermitteln Sie die Gleichungen der beiden zur x-Achse parallelen Asymptoten und die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. (6 BE)

   (b) Bilden Sie die 1. Ableitung $f'(x)$, und untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f. Geben Sie die Wertemenge von f an.
   [Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$] (5 BE)

   (c) Bilden Sie die 2. Ableitung $f''(x)$. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f und bestimmen Sie hieraus den Wendepunkt. Stellen Sie die Gleichung der Wendetangete auf.
   [Zur Kontrolle: $f''(x) = -\frac{3(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^3}$] (12 BE)

   (d) Zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-2 \leq x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm, Funktionswerte für $x = \pm 1$, ± 2, 3 und 4 berechnen!). Tragen Sie die Asymptoten und die Wendetangente in die Figur ein. (6 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto 3 \cdot \ln(\mathrm{e}^x + 1) - 2x$, $\mathbb{D}_F = \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f ist. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die von G_f, der y-Achse und den Geraden $y = 1$ und $x = 4$ begrenzt wird (Ergebnis auf drei Dezimalstellen genau). (8 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischem Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1|1|1)$, $B(7|7|3)$, $C(3|5|-1)$ und $Q(4|0|-16)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $[AB]$ bilden. Bestimmen Sie den Winkel an der Spitze des Dreiecks ABC (auf Grad gerundet). Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt des Dreiecks ABC? (8 BE)

   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass die Strecke $[AB]$ durch den Punkte D innen im Verhältnis $1 : 3$ geteilt wird. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Dreiecke ADC und ABC? Kurze Begründung! (7 BE)

2. (a) Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E_1. Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_1 in Normalenform an.
   [Mögliches Ergebnis: $E_1 : 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 13 = 0$] (8 BE)

   (b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q von der Ebene E_1. Liegen der Koordinatenursprung und der Punkt Q auf verschiedenen Seiten der Ebene E_1 oder nicht? (7 BE)

   (c) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_2 an, die zur Ebene E_1 parallel ist und den Punkt Q enthält. (4 BE)

   (d) Zeigen Sie, dass die Gerade

   $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

   der Ebene E_2 angehört. (6 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischem Koordinatensystem sind die Ebenen

$$E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3 = 0 \quad \text{und}$$
$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

sowie der Punkt $P(1|-3|-8)$ gegeben.

1. (a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E_1 und E_2.

   [Mögliches Ergebnis: $s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\nu \in \mathbb{R}$] (8 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass der Punkt P in der Ebene E_2 liegt und von der Ebene E_1 den Abstand 6 hat. (8 BE)

2. (a) Vom Punkt P wird das Lot auf die Ebene E_1 gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes F.

   [Zur Kontrolle: $F(-3|-1|-4)$] (7 BE)

   (b) Ermitteln Sie das Teilverhältnis, in dem der Punkt $T(t_1|t_2|-2)$ die Strecke $[PF]$ teilt, und die Koordinaten t_1 und t_2. (7 BE)

3. Geben Sie (zum Beispiel unter Verwendung der Lotebene durch F auf s) eine Gleichung der Geraden h an, die durch den Punkt F verläuft und auf der Schnittgeraden s (Teilaufgabe 1a) senkrecht steht.

   [Mögliches Ergebnis: $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ mit $\tau \in \mathbb{R}$]

   Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden h und s? (10 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

1. In einer Urne befinden sich 10 Kugeln. Sie sind mit den Zahlen 1 bis 10 beschriftet und sonst nicht unterscheidbar. Ein Zufallsexperiment besteht darin, gleichzeitig zwei dieser Kugeln zu ziehen und deren Zahlen zu betrachten.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   $A :=$ „Es werden zwei gerade Zahlen gezogen“,
   $B :=$ „Es werden zwei benachbarte Zahlen gezogen“,
   $C :=$ „Beide Zahlen sind nicht größer als 6“,
   $D := A \cup C$. (12 BE)

   (b) Das obige Zufallsexperiment wird nun mehrfach mit Zurücklegen wiederholt. Wie oft muß es mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% bei mindestens einer Ziehung die 10 dabei ist? (7 BE)

2. Das Ziehungsverfahren aus Aufgabe 1 wird nun geändert: Eine Kugel wird gezogen, ihre Zahl notiert. Ist die Zahl ungerade, wird die Kugel zurückgelegt und die zweite gezogen. Ist die erste Zahl gerade, folgt die Ziehung der zweiten Kugel, ohne dass die erste zurückgelegt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   $E :=$ „Die erste Zahl ist gerade“,

   $F :=$ „Die zweite Zahl ist gerade“. (7 BE)

3. Bei einem Volksfest behauptet der Festwirt, dass die Wahrscheinlichkeit, einen schlecht eingeschenkten Maßkrug zu bekommen, nur 10% beträgt. Die Behörde will kontrollieren, ob sich der Wirt an diese Aussage hält, und läßt an einem Tag die Füllmenge von 50 zufällig ausgewählten Krügen überprüfen (Stichprobe mit Zurücklegen).

   (a) Der Wirt will höchstens 3% Risiko eingehen, irrtümlich zur Rechenschaft gezogen zu werden. Welche Entscheidungsregel schlägt er der Behörde bei deren Stichprobe vor? (7 BE)

   (b) Die Behörde will aber schon bei 7 bemängelten Krügen einschreiten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Wirt zu Unrecht belangt? (7 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Ein ungewöhnlicher Laplace-Würfel ist mit folgenden Augeniahlen versehen: In grüner Farbe: 1; 2; 3; 4; in roter Farbe: 1; 2. Dieser Würfel liegt allen folgenden Aufgaben zugrunde.

1. Der Würfel wird viermal nacheinander geworfen und nur die Augenzahl notiert, die Farbe wird also nicht berücksichtigt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   $A :=$ „Es werden nur gleiche Zahlen gewürfelt“,

   $B :=$ „Es werden nur verschiedene Zahlen gewürfelt“, (10 BE)

2. Wie oft muß man mindestens würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einmal eine rote Augenzahl zu erhalten? (8 BE)

3. Der Würfel wird für ein Spiel verwendet: Wird eine rote Augenzahl gewürfelt, so rückt der Spieler um so viele Plätze nach hinten (negativ), wie er Augen gewürfelt hat. Würfelt er grün, so rückt er entsprechend der Augenzahl nach vorn (positiv). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

   $P(\{$„Der Spieler ist nach 2 Zügen um k Plätze vom Ausgangspunkt entfernt“$\})$

   für die Werte $k = -2; -1; 0; 1$. (14 BE)

4. Um die Laplace-Eigenschaft zu testen, wird folgendes Verfahren vereinbart: Der Würfel wird 100mal geworfen. Falls das Ergebnis „Augenzahl 1 oder 4“ weniger als 44mal und mehr als 56mal auftritt, soll dem Würfel die Laplace-Eigenschaft abgesprochen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem Würfel zu Recht die Laplace-Eigenschaft zugesprochen wird? (8 BE)