BAYERN Abitur 1986 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{4}{x^2} \ln \frac{1}{x}$$

mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_f$ und die Nullstelle der Funktion f. (3 BE)

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von $\mathbb{D}_f$.
   ($\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.) (5 BE)

   (c) Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts von G_f sowie die Wertemenge von f. (8 BE)

   (d) Bestimmen Sie die 2. Ableitung der Funktion f. Untersuchen Sie damit das Krümmungsverhalten des Graphen G_f und zeigen Sie, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt. Geben Sie seine Koordinaten an.
   [Teilergebnis: $f''(x) = 4 \cdot \frac{5 - 6 \ln x}{x^4}$] (7 BE)

   (e) Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und unter Verwendung des Punktes $P(0,75|y_P)$ den Graphen G_f im Bereich $0,75 \leq x \leq 3$ (Längeneinheit 2 cm). (5 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto 4 \cdot \frac{1 + \ln x}{x}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist. (BE)

   (b) Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das durch die x-Achse, den Graphen G_f und die Gerade $x = \mathrm{e}$ begrenzt wird, auf 2 Dezimalen gerundet. (3 BE)

   (c) Geben Sie die Integralfunktion $I : x \mapsto \int\limits_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}^+$, in Integralfreier Darstellung an, und bilden Sie $\lim\limits_{x \to \infty} I(x)$. Wie lässt sich am Graphen G_f der Betrag des Grenzwertes deuten? (BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

im maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$. Ihr Graph sei G_f.

1. (a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_f$ und untersuchen Sie G_f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. (3 BE)

   (b) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an. (5 BE)

   (c) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f.

   [Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$] (9 BE)

   (d) Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Asymptoten und den Graphen G_f im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ (Längeneinheit 1 cm). (5 BE)

2. Gegeben ist ferner die Funktion

$$g : x \mapsto \frac{x^3 + 2x - 1}{x(x+1)}$$

   mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}^+$; ihr Graph sei G_g.

   (a) Bestimmen Sie das Verhalten von G_g am linken Rand des Definitionsbereiches $\mathbb{D}_g$. (2 BE)

   (b) Weisen Sie nach, dass für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f(x) - g(x) = \frac{1}{x}$. Wie lässt sich daraus folgern, dass für $x > 0$ der Graph G_g unterhalb von G_f liegt? (6 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass G_g und die Gerade $h : y = x - 1$ genau einen gemeinsamen Punkt $S(x_S|y_S)$ besitzen. Berechnen Sie seine Koordinaten. (4 BE)

   (d) Skizzieren Sie G_g mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse in die Figur zu Teilaufgabe 1d ein, indem Sie außerdem berücksichtigen, dass G_g für $x > x_S$ oberhalb der Geraden h verläuft (Nachweis nicht erforderlich). (2 BE)

   (e) Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das von G_f und G_g sowie den Geraden $x = 1$ und $x = 3$ begrenzt wird. (4 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischem Koordinatensystem sind für $b \in \mathbb{R}$ die Punkte $A(2|-2|5)$, $B(0|6|b)$ und $C(3|6|0)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass es keinen Wert b gibt, dür den die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen. (4 BE)

   (b) Für welche Werte von b hat das Dreieck ABC bei B eine rechten Winkel? [Teilergebnis: $b = 3$] (5 BE)

2. A, B und C bilden also ein rechtwinkliges Dreieck und bestimmen eine Ebene E.

   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt I des Dreiecks ABC. (5 BE)

   (b) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform auf. [Mögliches Ergebnis: $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0$] (7 BE)

3. Gegeben ist neben der Ebene E aus Teilaufgabe 2b die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   mit $\nu \in \mathbb{R}$. Der Punkt D liege auf der Geraden g und ist die Spitze einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$.

   (a) Welche Lage hat die Gerade g bezüglich der Ebene E? (5 BE)

   (b) Berechnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse das Volumen V der Pyramide $ABCD$. (6 BE)

   (c) Der Punkt $P(3|7|4)$ der Geraden g wird an der Ebene E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P' (8 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischem Koordinatensystem sind die Punkte $A(-10|-9|-4)$, $B(11|5|-4)$, $C(-1|9|-10)$ und $P(-11|-5|10)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $[AB]$ sind. Berechnen Sie die Längen der Katheten $[CA]$ und $[CB]$. (4 BE)

   (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Winkelhalbierenden w des rechten Winkels im Dreieck ABC und die Koordinaten des Punktes T, in dem diese Winkelhalbierende die Hypotenuse $[AB]$ schneidet.
   [Teilergebnis: $T(2,6|-0,6|-4)$] (9 BE)

   (c) Ermitteln Sie das Teilverhältnis, in dem der Punkt T die Strecke $[AB]$ teilt. (4 BE)

2. Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E.

   (a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform an.
   [Mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 31 = 0$] (7 BE)

   (b) Welchen Abstand hat der Punkt P von der Ebene E? (3 BE)

   (c) Die Gerade g mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ geht durch den Punkt P und schneidet die Ebene E im Punkt Q. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q.
   [Zwischenergebnis: $Q(5|-15|4)$] (4 BE)

   (d) Wie lautet eine Gleichung der Geraden g', die zur Geraden g symmetrisch bezüglich der Ebene E liegt? (9 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

In einer Urne befinden sich 8 gleichartige Kugeln; fünf davon sind weiß und tragen die Ziffern 1 bis 5, drei sind rot und tragen die Ziffern 6 bis 8.

1. Ein Spieler zieht drei Kugeln aus der Urne,

   (a) indem er nach jedem Zug die gezogene Kugel wieder in die Urne zurücklegt, (4 BE)

   (b) ohne die gezogene Kugel zurückzulegen. (4 BE)

   Wie groß ist in jedem der beiden Fälle die Wahrscheinlichkeit für die Farbfolge rot-weiß-rot?

2. Wie oft muss der Spieler aus obiger Urne eine Kugel mit Zurücklegen mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $99,5\%$ mindestens eine rote Kugel zu erhalten? (7 BE)

3. Der Spieler entnimmt nun der Urne gleichzeitig drei Kugeln.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entnimmt er zwei rote und eine weiße Kugel? (4 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter den drei gezogenen Kugeln die Kugel mit der Ziffer 7 oder die Kugel mit der Ziffer 8? (9 BE)

4. Jemand legt nun zusätzlich zwei gleichfarbige Kugeln, entweder zwei rote oder zwei weiße in die Urne. Um zu entscheiden, ob zwei rote oder zwei weiße Kugeln hinzugelegt wurden, führt man folgenden Test durch: Man zieht aus der Urne 20mal mit Zurücklegen eine Kugel. Erhält man dabei weniger als 12 weiße Kugeln, so nimmt man an, dass zwei rote Kugeln in die Urne gelegt wurden; andernfalls nimmt man an, dass zwei weiße Kugeln hineingelegt wurden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheidet man sich irrtümlich für das Hinzufügen roter, mit welcher Wahrscheinlichkeit irrtümlich für das Hinzulegen weißer Kugeln? (12 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Gegeben sind fünf regelmäßige Oktaeder, für deren acht Begrenzungsflächen die Laplace-Bedingung gilt. Drei dieser Oktaeder tragen auf ihren Begrenzungsflächen die Augenzahlen 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3 (Tpy I), zwei Oktaeder tragen die Augenzahlen 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3 (Tpy II). Sonst unterscheiden sich die Oktaeder nicht.

1. Diese fünf Oktaeder werden in eine Urne gelegt. Das Zufallsexperiment besteht darin, zuerst ein Oktaeder aus der Urne zu ziehen, es anschließend zu werfen und die oben liegende Zahl x abzulesen.

   (a) Stellen Sie das Zufallsexperiment übersichtlich, z. B. mit Hilfe eines Baumdiagramms dar. Bestätigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit, die Augenzahl x zu erhalten, folgende Tabelle gilt:

x	1	2	3
$P(\|x\|)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{5}$

   (9 BE)

   (b) Das Zufallsexperiment wird nun dreimal wiederholt (das gezogene Oktaeder wird also jedesmal in die Urne zurückgemischt). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   E_1 := „Genau einmal tritt die Augenzahl 2 auf“,
   E_2 := „Mindestens zweimal tritt die Augenzahl 3 auf“,
   E_3 := „Die Augensumme beträgt mindestens 8“. (10 BE)

   (c) Wie oft muss man das Zufallsexperiment (Ziehen eines Oktaeders aus der Urne, werfen des Oktaeders) wiederholen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal die Augenzahl 1 oder 3 erhält? (7 BE)

2. Im Folgenden Spiel werden ein Oktaeder vom Typ I und ein Oktaeder vom Typ II gleichzeitig geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen beide Oktaeder die gleiche Augenzahl? (6 BE)

3. Jetzt wird mit den beiden Oktaedern des Typs II geworfen. Ein Spieler behauptet, dass einem der beiden Oktaeder die Laplace-Eigenschaft bezüglich der Begrenzungsflächen abzusprechen sei. Es wird vereinbart: Wenn bei 200maligem gelichzeitigen Werfen der beiden Oktaeder die Doppeleins (beide Oktaeder zeigen gleichzeitig die Eins) midestens 40mal und höchsten 60mal erscheint, so soll die Behauptung des Spielers verworfen werden, andernfalls wird sie angenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Behauptung angenommen, obwohl für beide Oktaeder die Laplace-Eigenschaft zutrifft? (8 BE)