Abiturprüfung 2000

MATHEMATIK

als Leistungskursfach

Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
LM1, LM2 und LM3 zur Bearbeitung aus.

BE

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto \left(k^2x + k\right)e^{-kx}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

4 1. a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen und untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

5 b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_k.

[zur Kontrolle: $f_k'(x) = -k^3 x\, e^{-kx}$]

9 c) Zeigen Sie, dass G_k genau einen Wendepunkt W_k besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. Weisen Sie nach, dass $ey = k(3 - kx)$ eine Gleichung der Wendetangente t_k ist.
Geben Sie eine Gleichung der Kurve C an, auf der alle Punkte W_k liegen.

5 d) Berechnen Sie $f_1(1{,}6)$. Zeichnen Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse G_1 und t_1 in ein gemeinsames Koordinatensystem im Bereich $x \in [-1{,}5; 4]$ (Längeneinheit 2 cm).

4 2. a) Durch $F(x) = (ax + b)\, e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f_1 gegeben. Bestimmen Sie a und b.

3 b) Der Graph G_1 und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Quadranten ein Flächenstück, das sich ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück einen endlichen Inhalt besitzt.

5 3. Begründen Sie, dass die Einschränkung von f_1 auf $\mathbb{R}^+$ eine Umkehrfunktion h besitzt, und geben Sie deren Definitions- und Wertebereich an. Der Term von h soll nicht explizit ermittelt werden. Begründen Sie, an welcher Stelle die Ableitung von h ein lokales Extremum aufweist. Bestimmen Sie den Wert der Ableitung von h an dieser Stelle.

4. Der Funktionswert $f_1(t)$ sei die Maßzahl für die Masse einer Substanz in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei ist t die Maßzahl der von Messbeginn an in Sekunden gemessenen Zeit ($t \geq 0$).

3 a) Zu welchem Zeitpunkt ist die Massenabnahme am stärksten? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 b) Nach T Sekunden ist die Anfangsmasse auf die Hälfte abgesunken. Bestimmen Sie ein Intervall der Länge $\frac{1}{10}$, in dem T liegt.

40

BE

II.

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{4(1-\ln x)}{(\ln x)^2}$ mit $D_f =]1;+\infty[$.

Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

3 a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

6 b) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche von f und zeigen Sie, dass G_f genau einen Extrempunkt E besitzt. Geben Sie auch Art und Koordinaten von E an. [zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{4(\ln x - 2)}{x(\ln x)^3}$]

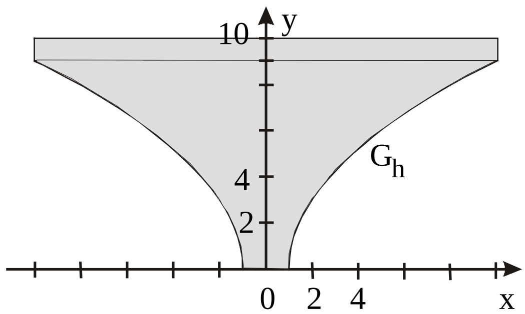
4 c) Berechnen Sie $f(2)$ und $f(12)$ und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 1 cm).

3 d) Begründen Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung von f, dass G_f mindestens einen Wendepunkt besitzen muss.

3 e) Weisen Sie nach, dass durch $F(x) = -\dfrac{4x}{\ln x} + 4e$ eine integralfreie Darstellung der Funktion $x \mapsto \int_e^x f(t)\,dt$ für $x > 1$ gegeben ist.

3 f) G_f und die x-Achse begrenzen im vierten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück. Untersuchen Sie, ob dieses einen endlichen Inhalt besitzt.

2. In nebenstehender Figur ist der Querschnitt eines bezüglich der y-Achse rotationssymmetrischen, massiven Werkstücks gegeben. Ein Teil der Berandung des Querschnitts ist der Graph G_h der Funktion $h: x \mapsto 3\sqrt{x-1}$ mit



6 $x \in [1;10]$.

4 a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Querschnitts.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Umkehrfunktion h^{-1} von h und geben Sie den Definitions- und Wertebereich von h^{-1} an.

8 c) Begründen Sie, dass $10^2\pi + \int_0^9 (1+\frac{1}{9}x^2)^2 \cdot \pi\,dx$ das Volumen des Werkstücks angibt und berechnen Sie dieses.

40

BE

LM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

4 1. Eine Kaffeerösterei bezieht ihre Kaffeebohnen aus Lateinamerika, und zwar 2 Sorten aus Brasilien, 2 Sorten aus Venezuela und 4 Sorten aus Kolumbien. In der Rösterei werden jeweils 4 Sorten zusammengemischt, wobei aus jedem Land mindestens eine Sorte vertreten sein muss.
Wie viele solche Mischungen sind möglich?

2. Angeblich bevorzugen mindestens 30 % der Kaffeetrinker koffeinfreien Kaffee.

6 a) Entwerfen Sie auf der Basis von 800 Befragten einen geeigneten Signifikanztest mit dem Signifikanzniveau 5 %. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel; legen Sie dabei die Normalverteilung als Näherung zugrunde.

2 b) In München gaben 210 von 800 Befragten an, koffeinfreien Kaffee zu bevorzugen.
Interpretieren Sie dieses Umfrageergebnis im Sinne des von Ihnen in Teilaufgabe a entworfenen Tests.

3. Als Kaufanreiz legt die Kaffeerösterei in 20 % aller Kaffeedosen ein Kaffeetässchen. Die Dosen gelangen in zufälliger Sortierung in die Regale eines Supermarkts. Monika kauft dort jede Woche eine Dose.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet sie

2 a) in der 5. Woche das erste Tässchen,

2 b) spätestens in der 5. Woche das erste Tässchen,

2 c) frühestens in der 5. Woche das erste Tässchen,

2 d) genau ein Tässchen in den ersten 5 Wochen?

4 4. Wie groß müsste der Anteil p der Kaffeedosen mit einem Tässchen mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % unter 20 Dosen wenigstens eine mit einem Tässchen ist?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5 5. Bei einer größeren Lieferung von Porzellantässchen ist ein unbekannter Anteil d beschädigt. Schätzen Sie mithilfe der Tschebyschow-Ungleichung die Anzahl der Tässchen ab, die man mindestens überprüfen muss, um d mit einer Sicherheit von mindestens 90 % auf 5 Prozentpunkte genau zu bestimmen.

6. Der Hersteller der Kaffeetässchen, der normalerweise Tässchen mit einer Ausschussquote von 10 % liefert, kommt mit der Produktion nicht nach. Er bezieht daher 20 % der Tässchen von einem Zulieferer, bei dem die Ausschussquote 30 % beträgt. Hersteller und Zulieferer verpacken jeweils ihre Tässchen in gleicher Weise in nicht unterscheidbare Kisten, die jeweils eine große Anzahl Tässchen enthalten.
In der Kaffeerösterei bemerkt man den erhöhten Ausschuss und führt folgenden Schnelltest durch:
Einer Kiste werden 5 Tässchen entnommen. Wenn darunter höchstens ein Tässchen defekt ist, wird die Kiste verwendet, andernfalls ausgesondert.
Für die Rösterei können dabei folgende zusätzliche Kosten entstehen:
150 DM beim Aussondern einer Kiste mit der Ausschussquote 10 % und
120 DM bei der Verwendung einer Kiste mit der Ausschussquote 30 %.

7 a) Berechnen Sie die mittleren zusätzlichen Kosten pro Kiste.

4 b) Wie viel darf der Schnelltest pro Kiste höchstens kosten, damit er sich gegenüber der Alternative, alle Kisten ungeprüft zu verwenden, aus finanzieller Sicht lohnt?

40

BE

IV.

Die Schüler der K13 des Graf-Felix-Gymnasiums wollen beim Herbstfest eine Tombola zum Thema „EURO“ veranstalten. Dazu werden die folgenden zwei Vorschläge diskutiert.

1. Vorschlag I:
   Auf einem Glücksrad sind vier gleich große Sektoren mit den Buchstaben E, U, R und O markiert. Nach jeder Drehung wird der angezeigte Buchstabe notiert.
   a) Das Glücksrad wird als ideal vorausgesetzt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
   2 E_1: „Bei den ersten vier Drehungen wird genau ein E notiert“,
   2 E_2: „Spätestens bei der vierten Drehung wird erstmals ein E notiert“,
   3 E_3: „Bei den ersten vier Drehungen werden vier verschiedene Buchstaben notiert“,
   5 E_4: „Nach fünf Drehungen kann man aus den notierten Buchstaben unter Weglassen eines Buchstabens das Wort EURO bilden“.
   [Ergebnis: $P(E_4) = \frac{15}{64}$]
   5 b) Ein Spiel besteht aus fünfmaligem Drehen des idealen Glücksrads. Kann man aus den notierten Buchstaben unter Weglassen eines Buchstabens das Wort EURO bilden, gewinnt man einen Preis. Bestimmen Sie mithilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall, in dem die Zahl der zu vergebenden Preise mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit liegt, wenn 640 Spiele ausgeführt werden.
   5 c) Es werden 640 Spiele wie in Teilaufgabe b ausgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die bereitgestellten Preise nicht ausreichen, soll unter 5 % bleiben. Wie viele Preise müssen mindestens bereitgestellt werden, wenn man die Normalverteilung als Näherung zugrunde legt?
   5 d) Nach der Inbetriebnahme des Glücksrads ist der Verdacht aufgekommen, dass der Buchstabe E unerwartet oft als Ergebnis auftritt. Die Nullhypothese H_0: „Das Glücksrad liefert den Buchstaben E mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 25 %“ soll durch 200-maliges Drehen des Glücksrads getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für das Signifikanzniveau 5 %.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

2. Vorschlag II:

In einer Urne liegen 4k, $k \in \mathbb{N}$, gleichartige Kugeln, von denen jeweils k Kugeln einen der Buchstaben E, U, R oder O als Aufschrift tragen. Ein Teilnehmer an der Tombola zieht vier Kugeln ohne Zurücklegen. Er erhält einen Preis, wenn er aus seinen Buchstaben das Wort EURO bilden kann.

3 a) Berechnen Sie für k = 5 die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Preis gewinnt.

7 b) Wie groß ist in Abhängigkeit von k die Wahrscheinlichkeit p(k), dass er einen Preis gewinnt? Bestimmen Sie den Grenzwert von p(k) für $k \to +\infty$.

3 c) Erläutern Sie in Worten, warum der Grenzwert aus Teilaufgabe 2b mit dem Ergebnis für $P(E_3)$ aus Teilaufgabe 1a übereinstimmt.

40

BE

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(4|1|3)$, $P(-2|-2|9)$, $Q(1|-5|-3)$ sowie die Ebenenschar E_t: $8x_1 - tx_2 + 7x_3 + 3 = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

6 1. Es sei $\vec{e}_1 = k \cdot \overrightarrow{AP}$ und $\vec{e}_2 = \ell \cdot \overrightarrow{AQ}$ mit $k,\ \ell \in \mathbb{R}^+$.
Bestimmen Sie k, ℓ und einen weiteren Vektor $\vec{e}_3$ so, dass $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

4 2. a) Welche Ebene der Schar E_t besitzt den größten Abstand vom Koordinatenursprung?

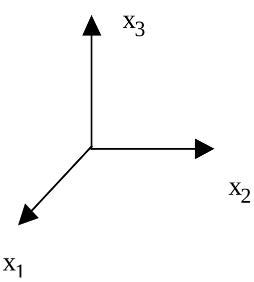
4 b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist E_t echt parallel zur Geraden AP? Diese zu AP parallele Ebene der Schar wird mit E bezeichnet. Zeigen Sie, dass der Punkt Q in E liegt. [Teilergebnis: $E = E_2$]

3 c) Geben Sie eine Gleichung in Normalenform für die Ebene H an, in der die Punkte A, P und Q liegen.
[mögliches Ergebnis: H: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 9 = 0$]

4 d) Die Schnittgerade von H und E ist s. Begründen Sie, dass s parallel zu AP ist, und geben Sie eine Gleichung von s an.

7 3. a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B und C in der Ebene E sowie des Punkts D auf der Strecke [AP] derart, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist, das in einer zu H senkrechten Ebene liegt.
[Teilergebnis: $B(0|5|1)$, $C(-4|3|5)$]

4 b) Legen Sie ein Schrägbild des Koordinatensystems an (ganze Seite, Ursprung in der Blattmitte) und tragen Sie das Quadrat ABCD, die Schnittgerade s sowie die Punkte P und Q ein.



4. Die Punkte A, B, Q, D und C bilden zusammen mit einem Punkt R ein Prisma mit der Grundfläche ABQ.

4 a) Zeichnen Sie das Prisma in das Koordinatensystem von Aufgabe 3b ein und begründen Sie, dass das Prisma gerade ist.

4 b) Berechnen Sie das Volumen des Prismas.

40

BE

VI.

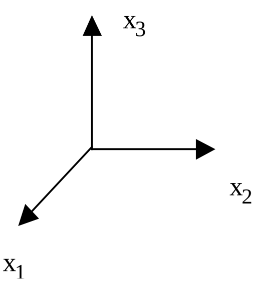
In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(10|0|0)$, $B(0|10|0)$ und die Ebenenschar H_a: $ax_1 - x_3 = 0$, $a \in \mathbb{R}^+$ gegeben. F_a ist der Fußpunkt des von A aus auf die Ebene H_a gefällten Lots. Der Lotfußpunkt F_a, der Koordinatenursprung O und die Punkte A und B bilden die Ecken des Tetraeders $OABF_a$. Dieses Tetraeder ist nicht regulär, d. h., die Kanten sind nicht alle gleich lang.

4 1. a) Begründen Sie, dass alle Ebenen H_a die x_2-Achse enthalten. Welche Ebene erhält man für $a \to +\infty$?

5 b) Berechnen Sie die Koordinaten von F_a.

[Ergebnis: $F_a\left(\frac{10}{1+a^2} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \frac{10a}{1+a^2}\right)$]

3 c) Zeichnen Sie das Tetraeder $OABF_a$ für $a = 2$ in ein Schrägbild des Koordinatensystems ein (Querformat, Ursprung in der Blattmitte).



4 d) Begründen Sie, dass alle Seitenflächen des Tetraeders $OABF_a$ rechtwinklige Dreiecke sind.

7 e) Bestimmen Sie den Umkreismittelpunkt M des (rechtwinkligen!) Dreiecks OAB. Begründen Sie ohne Rechnung, dass M auch Mittelpunkt der Kugel ist, auf der alle Ecken des Tetraeders $OABF_a$ liegen. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an.

6 2. a) Berechnen Sie das Tetraedervolumen V_a und begründen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}^+$ gibt, für das V_a maximal wird.

7 b) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Ebene H_a, die den Mittelpunkt N der Strecke $[AF_2]$ enthält. Diese Ebene schneidet das Tetraeder $OABF_2$ und zerlegt es in zwei Teilkörper. Kennzeichnen Sie die entstandene Schnittfläche im Schrägbild aus Teilaufgabe 1c. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Volumina der beiden Teilkörper stehen.

4 c) In welchem Verhältnis teilt die Ebene $H_{\frac{1}{3}}$ den Winkel zwischen den an der Kante [OB] zusammenstoßenden Seitenflächen des Tetraeders $OABF_2$?

40