Abiturprüfung 2001

MATHEMATIK

als Leistungskursfach

Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
LM1, LM2 und LM3 zur Bearbeitung aus.

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k:\ x \mapsto \ln\left(\frac{x}{k}+\frac{k}{x}\right)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

2 1. a) Bestimmen Sie das Verhalten von f_k an den Rändern von D_k .

6 b) Bestätigen Sie, dass gilt: $f_k'(x) = \frac{x^2-k^2}{x\cdot(x^2+k^2)}$.

Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts von G_k.

4 c) Berechnen Sie für $k \neq 1$ die Koordinaten des Schnittpunktes $S_k(x_S|y_S)$ von G_1 und G_k in Abhängigkeit von k . [Teilergebnis: $x_S = \sqrt{k}$]

5 d) Zeichnen Sie die Graphen G_1 und G_4. Berechnen Sie dazu die Funktionswerte an geeigneten Stellen und berücksichtigen Sie alle bisherigen Ergebnisse.

3 2. a) Zeigen Sie, dass gilt: $f_1'(x_S) + f_k'(x_S) = 0$ (mit x_S aus Teilaufgabe 1c).

6 b) Die Tangenten t_1 und t_k an die Graphen G_1 und G_k im Punkt S_k begrenzen zusammen mit der x-Achse ein Dreieck. Begründen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist. Berechnen Sie für k = 4 die Innenwinkel des Dreiecks (auf eine Dezimale gerundet).

3. Für $x \in\ ]0; 1]$ gilt die Ungleichungskette: $-\ln x \leq f_1(x) \leq \ln(x+1) - \ln x$ (Nachweis nicht erforderlich).

8 a) Der Graph G_1, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung x = 1 begrenzen ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück J. Zeigen Sie mit Hilfe obiger Ungleichungskette, dass J einen endlichen Inhalt hat, dessen Wert in [1; 2ln2] liegt.
(Hinweis: $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ kann ohne Nachweis verwendet werden.)

6 b) Gegeben ist die Integralfunktion $F:\ x \mapsto \int_1^x f_1(t)\,dt$ mit $x \in \mathbb{R}^+$.

Der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.

In einem der folgenden Diagramme ist G_F richtig gezeichnet. Geben Sie für jedes der anderen Diagramme einen Grund an, warum es sich nicht um G_F handeln kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE
40

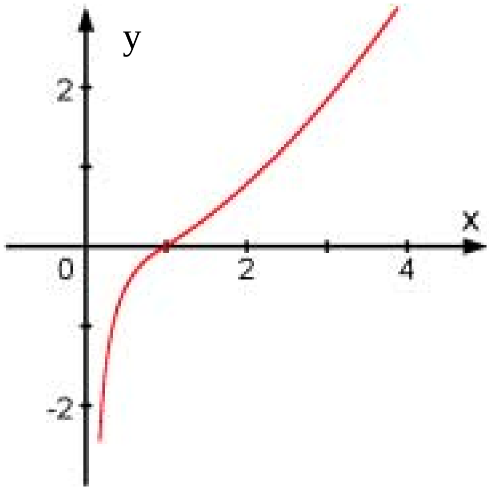


Diagramm 1

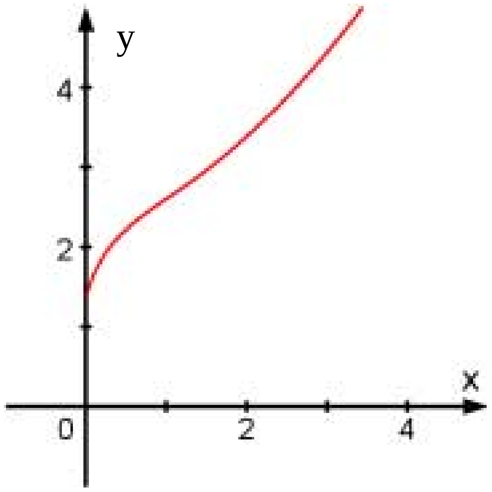


Diagramm 2

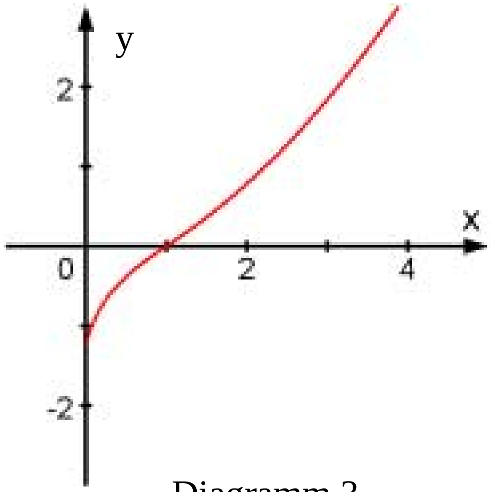


Diagramm 3

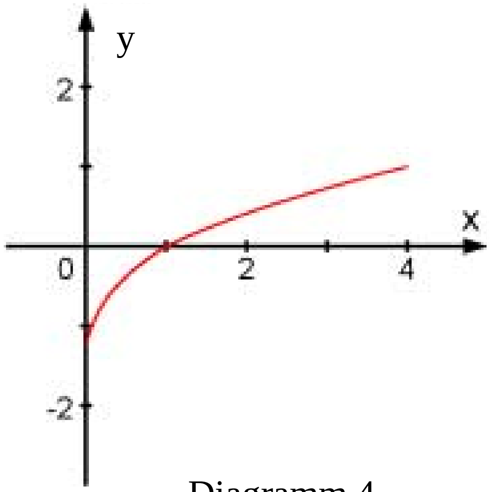


Diagramm 4

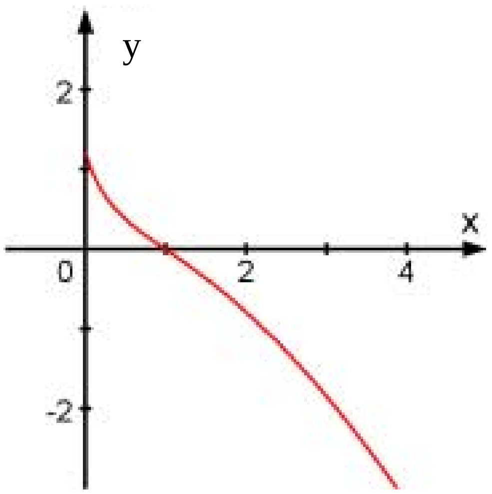


Diagramm 5

BE

II.

Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_k\colon\ x \mapsto kx \cdot \sqrt{4-kx}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximaler Definitionsmenge D_k. Der Graph von g_k wird mit G_k bezeichnet.

4 1. a) Bestimmen Sie D_k, das Verhalten von g_k an den Rändern von D_k und die Nullstellen von g_k.

6 b) Bestätigen Sie, dass im Inneren von D_k gilt: $g_k'(x) = \dfrac{k(8-3kx)}{2\sqrt{4-kx}}$.

Bestimmen Sie den Kurvenpunkt mit horizontaler Tangente und berechnen Sie $g_k'(0)$.

4 c) Begründen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass der in Aufgabe 1b ermittelte Kurvenpunkt Hochpunkt von G_k ist. Geben Sie die Wertemenge von g_k an.

7 d) Untersuchen Sie das Verhalten von g_k' bei Annäherung an den rechten Rand von D_k. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ und G_1 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

5 e) G_k und die positive x-Achse schließen das Flächenstück A_k ein. Berechnen Sie das Volumen V_k des Rotationskörpers R_k, der bei Rotation von A_k um die x-Achse entsteht. [Zur Kontrolle: $V_k = \frac{64}{3k}\pi$]

Der Graph H_k der Funktion $h_k\colon\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{x \cdot (4-kx)}{k}}$ mit $k > 0$ und Definitionsmenge $[0; \frac{4}{k}]$ ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt $(\frac{2}{k} \mid 0)$ und dem Radius $\frac{2}{k}$ (Nachweis nicht erforderlich).

2 2. a) Zeichnen Sie $H_{0,5}$ und H_1 in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1d ein.

6 b) Zeigen Sie, dass für $k \le 0{,}5$ die Graphen G_k und H_k genau zwei gemeinsame Punkte haben. [Hinweis: Ausschluss eines dritten Schnittpunktes für $k < 0{,}5$ durch Betrachtung der Definitionsmenge]

6 c) Wenn H_k um die x-Achse rotiert, entsteht die Kugel K_k. Für $k \le 0{,}5$ lässt sich aus dem Rohling K_k durch geeignetes Abschleifen der Rotationskörper R_k (vgl. Teilaufgabe 1e) herstellen.
Begründen Sie, für welches k das Verhältnis der Volumina von R_k und K_k am günstigsten, also der Volumenanteil des Abfalls kleinstmöglich ist.
Für welches k entstehen genau 50 % Abfall?

40

LM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

In einem Supermarkt werden Joghurtbecher angeboten. Die Lieferung der Becher erfolgt auf Paletten zu je 200 Stück.
Langjährige Erfahrung zeigt: Ein Becher wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % zum regulären Preis verkauft. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher bis zum Ablauf des Mindesthaltbarkeitsdatums nicht verkauft werden kann und danach zu einem Sonderpreis angeboten werden muss, ist 10 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher beschädigt und somit unverkäuflich ist, beträgt 5 %.

2 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von einer Palette mehr als 175 Becher regulär verkauft werden?

6 2. Bestimmen Sie die kleinste Anzahl von Paletten, so dass sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % wenigstens eine Palette befindet, von der höchstens 6 Becher wegen Beschädigung unverkäuflich sind.

3. Unter 40 Joghurtbechern befinden sich genau 4 beschädigte. Die Becher stehen in rein zufälliger Anordnung in 4 Reihen zu je 10 Bechern in einem Regal.

3 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich alle beschädigten Becher in der hintersten Reihe?

4 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in jeder Reihe genau ein beschädigter Becher?

4. Die beschädigten Becher weisen ausschließlich folgende Schäden auf:
E: „Aludeckel eingedrückt“ oder
G: „Becher gebrochen“.
Der Schaden E tritt bei 4 % aller Becher, der Schaden G bei 40 % der beschädigten Becher auf.

5 a) Ermitteln Sie, ob die Schäden E und G unabhängig voneinander auftreten.

2

BE	
7	b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Becher, dessen Deckel eingedrückt ist, gebrochen?

(Fortsetzung nächste Seite)

5	5. Bei einem regulär verkauften Becher beträgt die Differenz aus Verkaufs- und Einkaufspreis 22 Pf. Diejenigen Becher, die bis zum Ablauf des Mindesthaltbarkeitsdatums nicht verkauft werden konnten, werden für die Hälfte des ursprünglichen Verkaufspreises angeboten. Von diesen können dann erfahrungsgemäß 60 % doch noch verkauft werden. Für die Beseitigung der Becher, die wegen Beschädigung oder wegen Ablaufs des Mindesthaltbarkeitsdatums unverkäuflich sind, fallen keine zusätzlichen Entsorgungsgebühren an. Aus diesen Informationen errechnet sich für den Supermarkt im Mittel ein Gewinn von 11,2 Pf pro Becher. Berechnen Sie den Einkaufspreis eines Bechers.
6	6. Der Supermarkt bezieht pro Jahr 50 Paletten Joghurtbecher. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der Anteil der in einem Jahr regulär verkauften Joghurts von dem langjährigen Erfahrungswert 0,85 um weniger als 0,01 abweicht.
	7. Der Supermarkt will seine Joghurtbecher von einer anderen Firma beziehen und erwartet dadurch weniger Beschädigungen. Die Nullhypothese „Die neuen Becher sind mindestens so anfällig gegen Beschädigungen wie die alten“ soll auf der Basis von 1000 Joghurtbechern und dem Signifikanzniveau 5 % getestet werden. Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung als Näherung die Entscheidungsregel.
40	

BE

IV.

Ein Fitness-Studio hat 300 weibliche und 200 männliche Mitglieder.

5 1. 30 % der weiblichen Mitglieder sind älter als 50 Jahre. Ein Viertel der über 50-jährigen Mitglieder sind Männer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein männliches Mitglied älter als 50 Jahre?

2. In jeder Woche verlost der Inhaber des Fitness-Studios eine Wochenendreise unter den Mitgliedern.

3 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen bei den nächsten 50 Verlosungen mehr Frauen als Männer?

4 b) Wie oft muss die Verlosung mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % wenigstens ein männliches Mitglied eine Wochenendreise gewinnt?

3. In einer Illustrierten wird behauptet, dass mindestens 20 % der Besucher von Fitness-Studios Mittel zu sich nehmen, mit denen sie gegen geltende Doping-Bestimmungen verstoßen würden. Spontan erklären sich alle Mitglieder des Fitness-Studios zu einem Test bereit. 200 Mitglieder werden rein zufällig dazu ausgewählt.

4 a) Die Nullhypothese H_0: „Mindestens 20 % nehmen Doping-Mittel“ soll auf dem Signifikanzniveau 1 % getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

5 b) Wie groß ist bei obiger Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die Nullhypothese H_0 nicht ablehnen kann, obwohl nur 9 % der Besucher von Fitness-Studios Doping-Mittel verwenden. Verwenden Sie die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.

5 4. 12 neue Mitglieder haben sich angemeldet, darunter ein Ehepaar. Sie werden rein zufällig so auf drei verschiedene Übungsgruppen aufgeteilt, dass in die 1. Gruppe 4, in die 2. Gruppe 3 und in die 3. Gruppe 5 der neuen Mitglieder kommen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ehepaar zusammen in einer Gruppe?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5. Eine Zufallsgröße X hat die folgende Verteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,11	0,32	0,35	0,12	a	b

5

a) Wie groß sind die Werte a und b, wenn die Zufallsgröße X den Erwartungswert 1,8 hat?
Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von X.
[Zur Kontrolle: $\sigma \approx 1{,}2$]

Das der Zufallsgröße X zugrunde liegende Zufallsexperiment wird 500-mal unabhängig ausgeführt. Wir betrachten die Zufallsgröße

$S = \sum_{i=1}^{500} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_{500}$, wobei die X_i die gleiche Verteilung wie die Zufallsgröße X besitzen.

4

b) Schätzen Sie mit der Tschebyschow-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der Wert von S größer als 850 und kleiner als

5 950 ist.

c) Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die Zufallsgröße S nahezu normalverteilt. Berechnen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, die in Teilaufgabe 5b mit der Tschebyschow-Ungleichung abgeschätzt wurde.

40

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(3|\,2|\,0)$, $B(0|\,3|\,2)$, $C_k(1+3k\,|\,2-k\,|\,4-2k)$ und $S_r(-2r\,|\,3+r\,|\,4)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Punkte C_k liegen auf der Geraden c, die Punkte S_r auf der Geraden s.

3 1. a) Zeigen Sie, dass die Gerade c parallel zur Geraden AB, aber nicht mit ihr identisch ist.

5 b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform an, in der die Punkte A, B und C_k liegen.

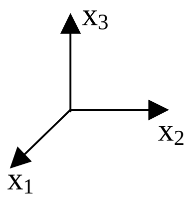
[Mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + 4x_2 + x_3 - 14 = 0$]

3 c) Für welchen Wert von k ist das Dreieck ABC_k bei A rechtwinklig?

[Zur Kontrolle: $k = 1$]

6 d) Zeigen Sie, dass die Gerade s parallel zur Geraden BC_1 ist und dass diese beiden Geraden den Abstand $d = 2$ haben.

5 2. a) Zeichnen Sie das rechtwinklige Dreieck ABC_1, die Geraden AB, c, s und die Pyramide ABC_1S_0 in ein Schrägbild des Koordinatensystems ein.



6 b) Das Dreieck ABC_k ist die Grundfläche der dreiseitigen Pyramide ABC_kS_r. Begründen Sie, dass das Volumen V dieser Pyramide unabhängig von k und r ist.

6 3. a) Die Eckpunkte des Dreiecks ABC_1 liegen auf einer Kugel K, deren Mittelpunkt M in der durch diese Punkte bestimmten Ebene E (siehe Aufgabe 1b) liegt. Ermitteln Sie eine Gleichung der Kugel K.

[Teilergebnis: $M(2|\,2|\,2)$]

6 b) Die Gerade s schneidet die Kugel K in den Punkten P und Q, die zusammen mit B und C_1 Ecken eines Trapezes sind. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

40

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebene
E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 36 = 0$, der Punkt $P(8|6|8)$ und durch P die Geradenschar

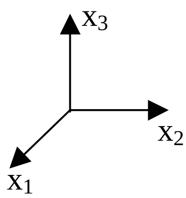
$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2-2t \\ -4+t \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } t,\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

3 1. a) Zeigen Sie, dass alle Geraden g_t in der Ebene E liegen.

7 b) Weisen Sie nach, dass alle Geraden g_t die x_1x_2-Ebene schneiden, und geben Sie eine Gleichung der Geraden s an, auf der diese Schnittpunkte liegen.

[Mögliches Teilergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}$]

4 c) Legen Sie ein Schrägbild des Koordinatensystems an (ganze Seite, Ursprung in Blattmitte, Maßstab geeignet wählen) und tragen Sie den Punkt P, die Gerade s sowie drei beliebige Geraden der Geradenschar g_t ein.



3 d) Geben Sie eine Gleichung für die Gerade an, die durch P läuft, in der Ebene E liegt, aber nicht der Geradenschar g_t angehört.

7 2. a) Q ist die senkrechte Projektion von P auf die x_1x_2-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S auf der Geraden s so, dass das Dreieck PQS minimalen Flächeninhalt hat. Tragen Sie das Dreieck in die Zeichnung aus Aufgabe 1c ein. [Zur Kontrolle: $S(11{,}2|12{,}4|0)$]

5 b) Jede Gerade g_t schließt mit ihrer Projektion auf die x_1x_2-Ebene einen spitzen Winkel α_t ein. Begründen Sie, warum α_t maximal den Wert von $\sphericalangle PSQ$ annehmen kann.

5 3. a) Eine Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius r = 3 berührt die Ebene E im Punkt P. Dabei liegt M in dem Halbraum bezüglich E, der den Ursprung nicht enthält. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.

6 b) Der Punkt L liegt auf der Halbgeraden [PM und hat von E den Abstand d = 8. Die Tangenten, die von L aus an die Kugel K gelegt

40

werden können, schneiden die Ebene E in einem Kreis. Berechnen Sie den Radius R dieses Kreises.