Abiturprüfung 2002

MATHEMATIK

als Leistungskursfach

Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
LM1, LM2 und LM3 zur Bearbeitung aus.

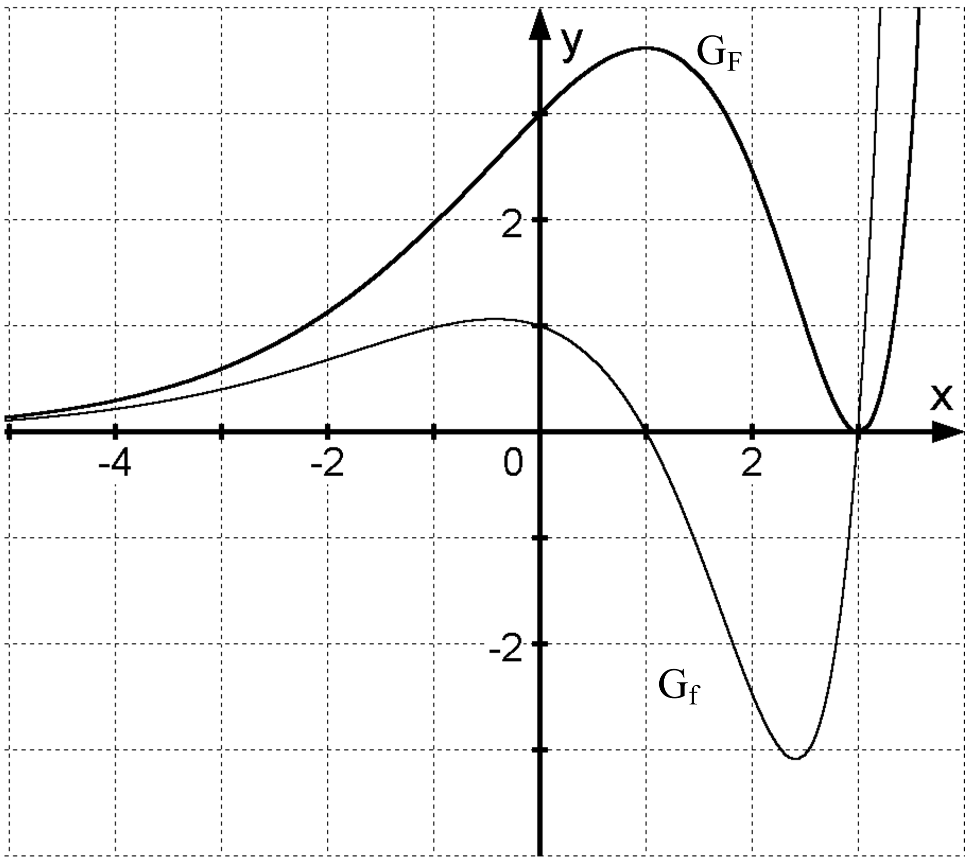
LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

Das Schaubild zeigt den Graphen G_f einer in ganz IR definierten, stetigen Funktion f und den Graphen G_F einer Stammfunktion F von f.

Die Achsenschnittpunkte beider Graphen sowie der Berührpunkt von G_F mit der x-Achse haben ganzzahlige Koordinaten.



6 1. a) Erläutern Sie, dass das dargestellte Monotonieverhalten von G_F sowie das dargestellte Krümmungsverhalten von G_F in Einklang damit stehen, dass F Stammfunktion von f ist.

3 b) G_f und die x-Achse umranden im 4. Quadranten ein Flächenstück. Bestimmen Sie dessen Inhalt mit Hilfe von G_F auf eine Dezimale genau.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	2. Es gilt: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ mit a, b, $c \in \mathbb{R}$.
6	a) Bestimmen Sie mit Hilfe der im Schaubild dargestellten Achsenschnittpunkte von G_f die Werte der Parameter a, b und c. [zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)e^x$]
9	b) Ermitteln Sie mit Hilfe partieller Integration einen Term für F und überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe 1b. [zur Kontrolle: $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9)e^x$]
6	c) Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{3} f(x)dx$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.
	3. f und F (vgl. Teilaufgabe 2) gehören zur Funktionenschar $g_k : x \mapsto \frac{1}{3}(x-3)(x-k)e^x$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.
3	a) Für welchen Parameterwert k erhält man f, für welchen F? Geben Sie den gemeinsamen Punkt aller Schargraphen an.
7	b) f besitzt als einzige Funktion der Schar eine Stammfunktion, die ebenfalls der Schar angehört. Zeigen Sie dies, beispielsweise indem Sie für zwei verschiedene Parameterwerte k_1 und k_2 $g'_{k_1}(x)$ berechnen und mit $g_{k_2}(x)$ vergleichen.
40	

BE

II.

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln\left(\frac{4}{x}-1\right)$ mit dem maximalen Definitionsbereich $D_f =]0;4[$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

4 a) Berechnen Sie die Nullstelle von f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

3 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

5 c) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zu $Z(2\,|\,0)$ ist.

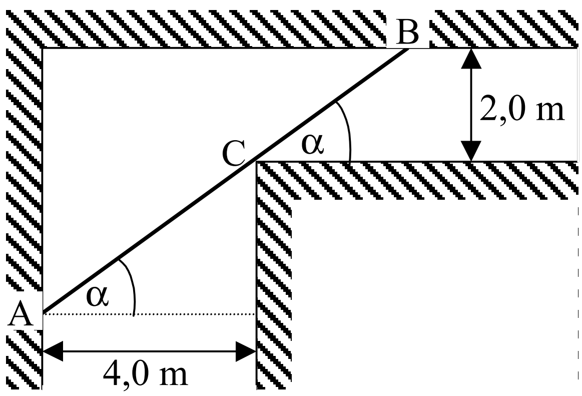
5 d) Berechnen Sie f(0,5). Zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse. Zeichnen Sie auch die Tangente im Symmetriezentrum ein (Ursprung des Koordinatensystems in der Blattmitte).

f besitzt eine Umkehrfunktion, die mit g bezeichnet wird.

6 e) Zeigen Sie, dass gilt: $g(x) = 4 - \frac{4e^x}{1+e^x}$. Tragen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1d ein.

6 f) Berechnen Sie mit Hilfe der Umkehrfunktion g das Integral $\int_0^2 f(x)\,dx$.

2. Zwei Gänge von 2,0 m und 4,0 m Breite treffen rechtwinklig aufeinander.
Es soll die größtmögliche Länge L eines Balkens ermittelt werden, den man in horizontaler Lage aus einem Gang in den anderen tragen kann. Die Dicke des Balkens wird als vernachlässigbar klein angesehen.



Dazu betrachte man die gezeichnete Figur. $l(\alpha)$ ist die Maßzahl der in Meter angegebenen Länge der Strecke [AB] und definiert für $0° < \alpha < 90°$ die Funktion l.

5 a) Geben Sie an, welche Bedeutung die Maßzahl der gesuchten Länge L für die Funktion l hat. Zeigen Sie: $l(\alpha) = \frac{2}{\sin\alpha} + \frac{4}{\cos\alpha}$.

6 b) Berechnen Sie L auf dm genau.

40

LM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

1. Philipp meldet sich im Internet erstmalig bei der Firma Booky an. Als Passwort wählt er aus Sicherheitsgründen eine zufällige Anordnung der 7 Großbuchstaben seines Vornamens.

3 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er das Passwort „PPPIIHL" wählt?

4 b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in seinem Passwort die beiden Buchstaben I nicht direkt hintereinander auftreten?

2. Anlässlich eines Jubiläums lädt die Firma Booky 300 Personen, von denen 100 bereits Booky-Kunden sind, zu einem Fest ein. Unter den Gästen werden im Laufe des Abends Preise verlost. Die Auswahl der Gewinner erfolgt dabei durch Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit den Namen der 300 Gäste.

4 a) Wie viele Preise müssen mindestens verlost werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % wenigstens einer der Booky-Kunden einen Preis erhält?

2 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht von 10 verlosten Preisen nur der letzte an einen Booky-Kunden?

4 c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen die ersten 5 Preise an 5 verschiedene Gäste?

5 3. Die Geschäftsleitung von Booky interessiert sich für den Bekanntheitsgrad ihres Firmennamens.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die relative Häufigkeit der Befragten, die Booky kennen, um weniger als 0,05 vom tatsächlichen Bekanntheitsgrad unterscheidet, soll mindestens 95 % betragen. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ab, wie viele Personen dafür mindestens befragt werden müssten.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

4. Die Firma Booky will eine Fernsehwerbung starten, wenn ihr Bekanntheitsgrad unter 60 % liegt. Die Entscheidung soll auf der Grundlage einer Umfrage unter 1200 zufällig ausgewählten Personen getroffen werden. Benützen Sie zur Berechnung die Normalverteilung als Näherung.

7 a) Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel mit einem möglichst kleinen Annahmebereich für die Einleitung der Werbekampagne, bei der die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werbekampagne irrtümlich unterlassen wird, höchstens 5 % ist.

4 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird nach der Entscheidungsregel von Teilaufgabe 4a die Werbekampagne eingeleitet, obwohl der Bekanntheitsgrad bei 65 % liegt?

5. Die Standard-Normalverteilung wird durch die Funktion

$\Phi\colon\ x \mapsto \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R})$ beschrieben, wobei $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$

ist.

3 a) Erläutern Sie die stochastische Bedeutung des Funktionswertes $\Phi(x)$ und begründen Sie damit, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$ ist.

4 b) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der Symmetrieeigenschaft von φ, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

40

BE

IV.

Die Firma Brettlmaier ist ein Holz verarbeitender Betrieb, der Profilbretter und Parkettdielen herstellt.

1. Die Stämme, die zu Profilbrettern geschnitten werden, bezieht die Firma Brettlmaier von einem Händler, der das Holz waggonweise anliefert. 80 % der Waggons enthalten ausschließlich Stämme aus Europa; der Rest der Waggons hat ausschließlich Ware aus nichteuropäischen Ländern geladen.

   Unter der Annahme, dass die Waggons unabhängig voneinander und rein zufällig angeliefert werden, berechne man

4 a) die Anzahl der Waggons, die man mindestens untersuchen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens einen mit nichteuropäischen Stämmen zu finden;

3 b) die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Lieferung von 200 Waggons mehr als 150 mit europäischen Stämmen zu finden.

   Nach dem Schnitt werden die Profilbretter nach den Qualitätsstufen A und B sortiert. Man erhält aus den europäischen Stämmen 65 % A-Bretter. Insgesamt liegt der Anteil der A-Sortierung bei 58 %.

6 c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewähltes Brett der B-Sortierung aus nichteuropäischem Holz hergestellt worden ist?

3 d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzen fünf aus einer großen Anzahl rein zufällig ausgewählte Bretter alle dieselbe Qualitätsstufe?

6 e) Nach längerer Produktionszeit ist der Verdacht aufgekommen, dass sich der Anteil der A-Qualität auf einen Wert $p < 0{,}58$ verringert hat. Dazu soll die Nullhypothese $p \geq 0{,}58$ mit einem Signifikanztest auf dem Niveau 5 % getestet werden. Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung als Näherung die Entscheidungsregel für einen solchen Test auf der Basis einer Stichprobe von 300 Brettern.

5 2. Zur Herstellung von Parkettdielen stehen viele, jeweils gleich große Brettchen zur Verfügung, die nach dem Aussehen in drei Kategorien "ruhig", "mittel" und "lebhaft" eingeteilt werden.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, für eine Diele 15 Brettchen auszuwählen, wenn es nur darauf ankommt, in welcher Stückzahl die drei Kategorien auftreten?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
7	3. Die Parkettdielen werden verlegefertig mit hoher Maßgenauigkeit verkauft. Sie weisen eine mittlere Länge von 800,0 mm bei einer Standardabweichung von 0,2 mm auf. Beim Verlegen in einem Raum werden 10 Parkettdielen nahtlos aneinandergefügt. Die Gesamtlänge soll möglichst genau 8 m betragen. Schätzen Sie unter der Annahme, dass die Länge der einzelnen Parkettdielen und die Gesamtlänge aus den zehn Parkettdielen jeweils normalverteilt sind, die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass höchstens 1,0 mm abgeschliffen werden müssen.
6	4. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X kann näherungsweise mit Hilfe der kumulativen Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung wie folgt angegeben werden: $P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k-20+0{,}5}{4}\right)$ Beschreiben Sie ein konkretes Zufallsexperiment und eine Zufallsgröße X mit der angegebenen Verteilung.
40	

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

1. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(4\,|\,-1\,|\,1)$, $B(0\,|\,3\,|\,1)$ und $D(2\,|\,-1\,|\,3)$ gegeben.

9 a) Durch einen weiteren Punkt C wird das Dreieck ABD zu einem achsensymmetrischen Trapez ABCD ergänzt. [AB] ist dabei die längere der beiden parallelen Seiten. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C und zeigen Sie, dass die beiden parallelen Seiten dieses Trapezes den Abstand $\sqrt{6}$ haben.

[Teilergebnis: $C(0\,|\,1\,|\,3)$]

9 b) Das Trapez ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze der Ursprung O ist.
Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide.

3 c) Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt M von [AB] zugleich Umkreismittelpunkt des Trapezes ist.

3 d) Beschreiben Sie in Worten, wie der Umkugelmittelpunkt der Pyramide von Teilaufgabe 1b bestimmt werden kann. Führen Sie die Rechnung nicht durch.

4 e) Untersuchen Sie, ob die x_3-Achse die Trapezfläche trifft.

2. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{llcccl}
\text{(I)} & 3x_1 & - & dx_2 & & = -2d \\
\text{(II)} & & & (1001-a)x_2 & - \; 5x_3 & = -10 \\
\text{(III)} & & & & (1001+a)x_3 & = 4004
\end{array}$$

4 a) Zeigen Sie, dass das System bei gegebenem $d \in \mathbb{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}$, $|a| \neq 1001$ eindeutig lösbar ist.

5 b) In welchem der Fälle $|a| = 1001$ hat das System mehr als eine Lösung? Geben Sie für diesen Fall (bei gegebenem d) eine geometrische Deutung.

3 c) Bestimmen Sie a und d so, dass $(x_1\,|\,x_2\,|\,x_3) = (15\,|\,5\,|\,2002)$ Lösung des Gleichungssystems ist.

40

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(6\,|\,0\,|\,0)$, $B(6\,|\,6\,|\,6)$, die Ebene $F: x_1 - x_2 = 0$ und die Ebenenschar $G_k: kx_1 + 6x_2 - 6k = 0$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ gegeben.

4 1. a) Bestimmen Sie in Normalenform eine Gleichung der Ebene E, die die Punkte A, B und O enthält. Weisen Sie nach, dass das Dreieck OAB bei A rechtwinklig ist. [mögliches Teilergebnis: $E: x_2 - x_3 = 0$]

4 b) Alle Punkte des Dreiecks OAB, für die A der nächstgelegene Eckpunkt ist, werden grün gekennzeichnet. Welcher Bruchteil der Dreiecksfläche ist dann grün gefärbt? Begründen Sie Ihre Antwort anhand einer Skizze.

7 c) Durch die Spiegelung der Ebene E aus Teilaufgabe 1a an der Ebene F erhält man die Ebene E*. Begründen Sie, dass B und O Fixpunkte dieser Spiegelung sind. Ermitteln Sie für E* eine Gleichung in Normalenform. [mögliches Ergebnis: $E^*: x_1 - x_3 = 0$]

4 d) Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und E* sowie den Schnittwinkel φ von E und E* an.

4 2. a) Bestimmen Sie - soweit vorhanden - die Koordinaten der Schnittpunkte der Scharebenen G_k mit den Koordinatenachsen. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat jede Scharebene G_k ?

2 b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass alle Scharebenen G_k eine gemeinsame Schnittgerade g haben, und geben Sie eine Gleichung von g an.

3. Für jedes $k > 0$ begrenzen die Ebenen E, E*, G_k und die x_1x_2-Ebene eine dreiseitige Pyramide P_k.

11 a) Geben Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte von P_k an und berechnen Sie das Pyramidenvolumen V_k in Abhängigkeit von k.

4 b) Für welches k ist F Symmetrieebene von P_k? Geben Sie eine kurze Begründung.

40