

Abiturprüfung 2005

MATHEMATIK

als Leistungskursfach

Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
LM1, LM2 und LM3 zur Bearbeitung aus.

**Die Angabe ist vom Prüfling mit dem
Namen zu versehen und mit ab-
zugeben.**

Name: _____

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

Name:.....
(vom Prüfling einzutragen)

BE
4
4
7
5
7

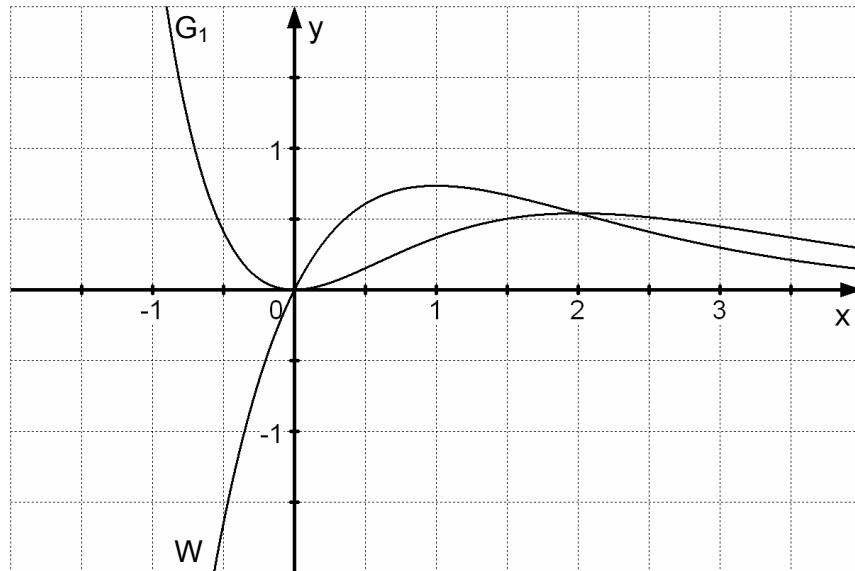
I.

1. Gegeben ist die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen

$$f_k : x \mapsto (x^2 + 1 - k)e^{-x} \text{ mit } k \in \mathbb{R} .$$

Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

- 4 a) Untersuchen Sie f_k auf Nullstellen in Abhängigkeit von k . Bestimmen Sie das Verhalten von f_k für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$.
- 4 b) Zeigen Sie, dass sich je zwei verschiedene Graphen G_k nicht schneiden, einander aber beliebig nahe kommen.
- 7 c) Für welche Werte von k besitzt G_k mindestens eine waagrechte Tangente? Zeigen Sie, dass die Punkte von G_k mit waagrechter Tangente auf dem Graphen W der Funktion $w : x \mapsto 2xe^{-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ liegen.
- 5 d) Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen G_1 und W . Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_2 in die Abbildung ein.



- 7 e) Bestätigen Sie, dass für $k \in \mathbb{R}$ gilt: $f_k(x) = w(x) - f_k'(x)$.
Der Graph G_1 begrenzt im ersten Quadranten mit der x -Achse ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück mit endlichem Inhalt. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt mit Hilfe der obigen Beziehung.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	2. In einer Fachzeitschrift war zu lesen: <i>„Am oder um den 12. Oktober 1999 hat die Weltbevölkerung die Grenze von sechs Milliarden Menschen überschritten. Zu Beginn des Jahres 2003 lebten bereits 6,274 Milliarden Erdenbürger. Im Jahr 2003 wurden im weltweiten Durchschnitt auf tausend Menschen, die zu Jahresbeginn lebten, 22 Geburten und 9 Todesfälle gezählt.“</i>
4	a) Wie viele Kinder wurden 2003 im Durchschnitt näherungsweise pro Minute geboren? Wie viele Milliarden Menschen lebten zu Beginn des Jahres 2004?
6	b) Sollte sich die Bevölkerungsentwicklung von 2003 in Zukunft nicht ändern, so ließe sich die Anzahl $N(j)$ der Erdenbürger zu Beginn des Jahres j nach der Formel $N(j) = N(2003) \cdot a^{j-2003}$ berechnen. Bestimmen Sie a und das Kalenderjahr, in dem die Zahl von neun Milliarden Menschen überschritten würde.
3	c) Bilden Sie die Ableitung der Funktion $N : j \mapsto N(j)$, $j \in [2003; +\infty[$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $N(j)$ und $N'(j)$?
40	

Name:.....
(vom Prüfling einzutragen)

BE
4
4
5
5
4

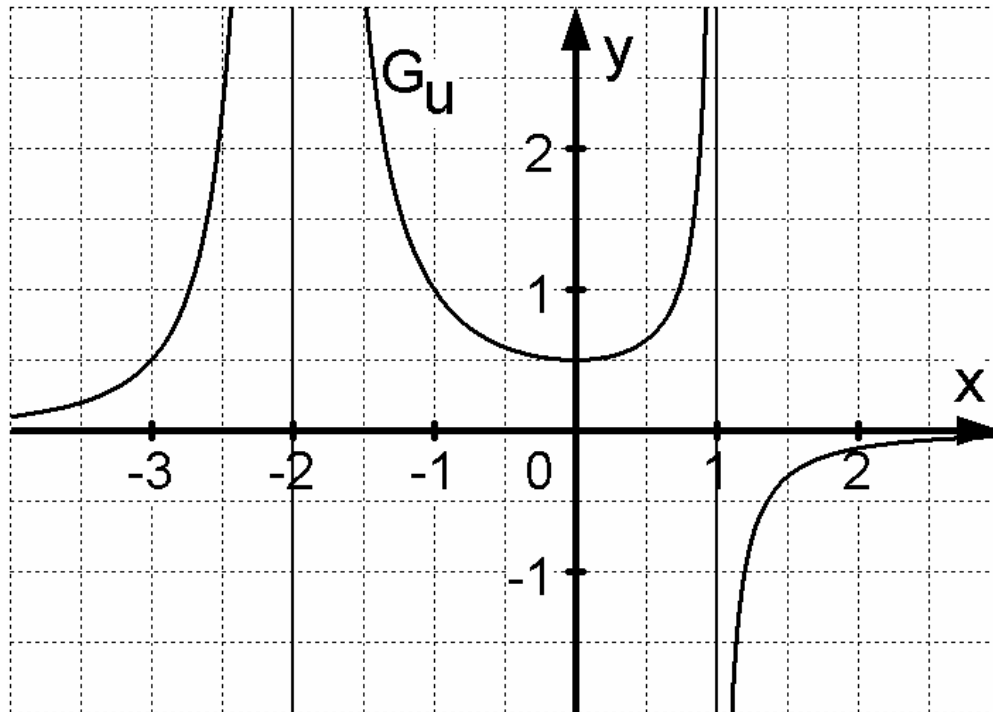
II.

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \ln \frac{-1}{1+x}$ mit dem maximal möglichen Definitionsbereich D . Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
- a) Bestimmen Sie D , die Nullstelle von f sowie das Verhalten von f an den Rändern von D .
- b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f .
- c) Warum besitzt f eine Umkehrfunktion? Geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} an und ermitteln Sie den Funktionsterm $f^{-1}(x)$.
- d) Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse die Graphen der Funktionen f und f^{-1} in ein Koordinatensystem. Tragen Sie dazu auch alle Asymptoten sowie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ein.
- e) Der Graph G_f , die x -Achse und die Gerade $x = -1$ schließen im zweiten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück mit endlichem Inhalt ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

2. Es sei g eine in \mathbb{R} differenzierbare Funktion mit dem Graphen G_g . Die Abbildung zeigt den Graphen G_u der in $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ definierten Funktion $u : x \mapsto u(x) = \frac{1}{g(x)}$. Die x -Achse und die Geraden $x = -2$ und $x = 1$ sind Asymptoten von G_u .



Zur Bearbeitung der folgenden Teilaufgaben können benötigte Werte aus der Abbildung näherungsweise abgelesen werden.

- 5 a) Geben Sie die Nullstellen von g an. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_u und G_g .
- 5 b) Begründen Sie, dass G_g in $x = -2$ und $x = 0$ waagrechte Tangenten hat.
- 5 c) Zeigen Sie, dass für alle Schnittpunkte von G_u und G_g gilt: $g'(x) = -u'(x)$. Ermitteln Sie $g'(-1)$, indem Sie $u'(-1)$ möglichst genau aus obiger Abbildung ablesen. (Entsprechende Hilfslinien sind einzuzeichnen.)
- 3 d) Geben Sie $g(0)$ an. Skizzieren Sie in obige Abbildung unter Berücksichtigung der gewonnenen Ergebnisse einen möglichen Graphen G_g .

LM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE	III.
	1. In einem Tonstudio wird eine CD mit 8 Liedern und 5 Instrumentalstücken zusammengestellt.
2	a) Auf wie viele Arten können die 13 Musikstücke angeordnet werden, wenn nur zwischen den Kategorien Lied und Instrumentalstück unterschieden wird?
4	b) Die CD wird in einem CD-Player mit der Random-Funktion abgespielt, so dass die 13 Musikstücke in zufälliger Reihenfolge ohne Wiederholung aufeinander folgen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten vier gespielten Stücken höchstens zwei Instrumentalstücke sind?
4	c) 20 Personen geben jeweils ihrem Favoriten unter den 8 Liedern eine Stimme. Wie viele verschiedene Stimmverteilungen sind möglich, wenn es nur darauf ankommt, wie viele Stimmen die einzelnen Lieder erhalten?
	2. Von allen in einem Musikladen verkauften CDs entfallen 25 % auf klassische Musik und 30 % auf Volksmusik. Der Rest wird der Popmusik zugeordnet. 60 % der Käufer einer Klassik-CD und 25 % der Käufer einer Popmusik-CD sind älter als 30 Jahre. Insgesamt werden 48 % der verkauften CDs von Kunden erworben, die älter als 30 Jahre sind.
5	a) Ein Kunde betritt den Musikladen und kauft eine Volksmusik-CD. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er höchstens 30 Jahre alt?
4	b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft ein Kunde, der älter als 30 Jahre ist, eine Klassik- oder Popmusik-CD?
	3. Der Musikladen bezieht seine Ware zu gleichen Teilen von den Großhändlern A und B. A liefert ausnahmslos Originalware. In jeder Lieferung des Großhändlers B befinden sich 15 % willkürlich eingestreute Raubkopien, die nur dadurch erkannt werden können, dass diesen CDs der Kopierschutz fehlt.
5	a) Wie viele zufällig aus dem Musikladen ausgewählte CDs muss man mindestens überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens eine Raubkopie zu entdecken? Rechnen Sie wie bei „Ziehen mit Zurücklegen“.
8	b) Eine Lieferung von 500 CDs von Großhändler B wird untersucht. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Bereich symmetrisch zum Erwartungswert, in dem die Zahl der Raubkopien mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % liegt (Näherung mit der Normalverteilung).

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	4. Der Betrug von Großhändler B wurde aufgedeckt. Er behauptet, dass er keinesfalls mehr als 15 % Raubkopien untergemischt habe. Es werden zufällig 200 CDs aus seinen Lieferungen ausgewählt und überprüft.
5	a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel mit der Behauptung des Großhändlers als Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5 %.
3	b) In welchem kleinstmöglichen Bereich liegt die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Entscheidungsregel die Nullhypothese trotz eines Raubkopieanteils von mindestens 25 % nicht abgelehnt wird?
40	

BE

IV.

1. Die Fluggesellschaft „LuckyAir“ wirbt mit 9 gleich großen quadratischen Fotos, die in Form eines Quadrats in 3 Reihen zu je 3 Fotos auf einem Plakat angeordnet sind, für Städtereisen. Vier dieser Aufnahmen zeigen Ansichten von Paris, drei von London und zwei von Rom.
 - 2 a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 9 Aufnahmen auf dem Plakat anzuordnen, wenn nur nach den Städten unterschieden wird?
 - 5 b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 9 Aufnahmen auf dem Plakat anzuordnen, wenn die vier Ansichten von Paris höchstens an ihren Ecken aneinander stoßen dürfen und alle 9 Fotos unterschieden werden?
2. LuckyAir bietet pro Flug 10 % der Flugtickets als Billigtickets für Frühbucher an. Die Anzahl der täglich pro Flug eingehenden Buchungswünsche für Billigtickets wurde registriert und statistisch ausgewertet. Dabei zeigte sich, dass diese Anzahlen annähernd binomialverteilt und voneinander unabhängig sind und dass sie während der ersten Woche nach Buchungsbeginn jeweils den Mittelwert 10 und die Varianz 6 haben.
 - 3 a) Bestimmen Sie die Parameter n und p der zugehörigen Binomialverteilung. [Ergebnis: $n = 25$; $p = 0,4$]
 - 3 b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am ersten Tag mindestens 9, aber höchstens 11 Buchungswünsche für Billigtickets für einen Flug eingehen?
 - 4 c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für einen Flug mit 300 Plätzen nach vier Tagen noch mindestens ein Billigticket erhältlich ist, wenn bis dahin alle Anfragen auch zu Buchungen geführt haben?
3. Die 10 % Billigtickets zum Preis von 49 € für Flüge an ein beliebtes Reiseziel werden stets alle in kürzester Zeit verkauft. Danach werden alle verbleibenden Tickets zunächst zum regulären Flugpreis von 199 € angeboten. Für die Flugtickets, die zwei Wochen vor Abreise noch nicht verkauft worden sind, wird ein Last-Minute-Preis von 99 € festgelegt. Durch dieses Angebot können im Mittel noch 60 % der Last-Minute-Tickets verkauft werden.
 - 6 a) Welcher Anteil der für dieses Reiseziel zunächst zum regulären Flugpreis angebotenen Tickets muss mindestens verkauft werden, damit der Durchschnittspreis pro Sitzplatz größer als 150 € ist? Geben Sie das Ergebnis auf ganze Prozent genau an.
 - 4 b) Tatsächlich wurden von allen zunächst zum regulären Flugpreis angebotenen Tickets 75 % verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Fluggast den Last-Minute-Preis bezahlt?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	<p>4. Um Kosten zu sparen, lässt LuckyAir eine Besatzung jeweils zweimal am Tag zu einem Ziel im Mittelmeerraum fliegen. Die reine Flugzeit für einen solchen Doppelflug beträgt im Mittel 9,0 Stunden bei einer Standardabweichung von 0,5 Stunden. Unabhängig davon sind für die Standzeiten am Boden insgesamt durchschnittlich 4,6 Stunden erforderlich, wobei relativ große Schwankungen dabei zu einer Standardabweichung von 1,0 Stunden führen.</p>
8	<p>a) Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die erforderliche Gesamtzeit für einen Doppelflug normalverteilt ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die maximal zulässige Einsatzzeit der Besatzung von 14 Stunden überschritten wird.</p>
	<p>Durch verschiedene Maßnahmen optimiert LuckyAir die Standzeiten, so dass sowohl der Mittelwert als auch die Schwankungen verringert werden.</p>
5	<p>b) Die optimierten Standzeiten seien normalverteilt. Wie groß darf bei einem Mittelwert von 4 Stunden 15 Minuten die Standardabweichung auf Minuten genau höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % eine Standzeit von 5 Stunden nicht überschritten wird?</p>
40	

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

BE
2
5
4
4
4
6
6
5
4
40

Gegeben ist die Ebenenschar

$$Z_a : \vec{x} = \overline{OD} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} a \\ 2a-4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } D(-2 | 0 | -2) \text{ und } \lambda, \tau, a \in \mathbb{R} .$$

1. a) Alle Scharebenen haben eine Gerade gemeinsam, die mit g bezeichnet wird. Geben Sie eine Gleichung von g an.

b) Zeigen Sie, dass

$$Z_a : (4a - 10) \cdot x_1 - (2a + 4) \cdot x_2 + (5a - 8) \cdot x_3 + 18a - 36 = 0$$

eine weitere mögliche Gleichung für die Ebenenschar Z_a ist.

c) Berechnen Sie, für welchen Wert des Parameters a die zugehörige Scharebene senkrecht auf der Scharebene Z_1 steht.

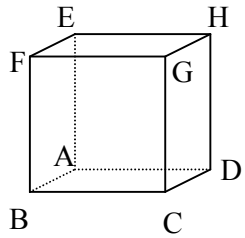
d) Zeigen Sie, dass die Scharebene Z_2 eine winkelhalbierende Ebene der beiden zueinander senkrechten Scharebenen Z_1 und Z_4 ist.

2. Der Punkt $M(-1 | 1 | 3)$ ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $3\sqrt{3}$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt D auf dieser Kugel liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Kugelpunkts F, für den [FD] ein Durchmesser der Kugel ist. [Ergebnis: F(0 | 2 | 8)]

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Kugelpunkte, die auf der Geraden g liegen. [Ergebnis: D und H(-6 | 2 | 2)]

c) Berechnen Sie die Längen \overline{DH} und \overline{HF} und begründen Sie, dass man die drei Punkte D, F und H zu einem Würfel ABCDEFGH wie in der Abbildung ergänzen kann.



d) Zeigen Sie, dass das Dreieck DHF in der Ebene Z_2 liegt. Begründen Sie ohne Rechnung nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, warum die Ebenen Z_1 und Z_4 je eine Würfel­fläche enthalten.

e) Der Eckpunkt G liegt in Z_4 (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Koordinaten von G.

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Geradenschar

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a+2 \end{pmatrix}$$

mit $a, \lambda \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Punkte $A(10|0|0)$, $B(0|5|0)$ und $C(0|0|5)$ bestimmen eine Ebene, die mit E bezeichnet wird.

- 3 1. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis $E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0$]
- 3 b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g_{-1} und der Ebene E .
- 4 c) Zeigen Sie, dass die Gerade g_{-2} in der Ebene E liegt und echt parallel zur Geraden AB ist.
- 5 2. a) Der Punkt C wird an der Geraden AB gespiegelt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts C^* . [Ergebnis: $C^*(4|8|-5)$]
- 4 b) Weisen Sie nach, dass das Drachenviereck AC^*BC den Flächeninhalt 75 hat.
- 6 c) Die Gerade g_{-2} schneidet die Strecke $[AC]$ im Punkt $A'(8|0|1)$ und zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teile (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teile.
3. In der Ebene $H : x_3 = 3$ liegen zwei parallele Schienen s_1 und s_2 . Die Schiene s_1 wird durch die Gerade $s_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ dargestellt. Auf den Schienen s_1 und s_2 ruht eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(18|28|5)$ und dem Radius $r = 3$.
- 6 a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts S , in dem die Kugel die Schiene s_1 berührt. [Ergebnis: $S(20|27|3)$]
- 5 b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schiene s_2 .
- 4 c) Die Kugel wird nun angestoßen und rollt auf die Ebene E zu. Geben Sie eine Gleichung der Geraden m an, auf der sich dabei der Mittelpunkt der Kugel bewegt. Begründen Sie, weshalb der Punkt, in dem die Kugel schließlich die Ebene E berührt, nicht mit dem Schnittpunkt von m und E zusammenfällt.